8 Vektorraumkonstruktionen

Sei K ein Körper.

8.1 Unendlich-dimensionale Vektorräume

Def 8.1.1 (Fortsetzung von Def. 1.2.11): Seien A und B Mengen. Man sagt, A und B haben die gleiche Kardinalität, wenn eine Bijektion $A \to B$ existiert. Notation dafür: $\#A = \#B$. Ist $\#A = \#\mathbb{N}$, so nennt man A abzählbar unendlich. Man schreibt: $\#A = \aleph_0$

aleph

„Kardinalität von A" (ist eine Kardinalzahl)

$0, 1, 2, \ldots$ sind Kardinalzahlen

$\aleph_0$ ist eine Kardinalzahl.

Ist A weder endlich noch abzählbar unendlich, so nennt man A überabzählbar.

Bsp: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich, da eine Bijektion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ existiert:

$$
\begin{aligned}
0 &\mapsto 0\\
1 &\mapsto 1\\
2 &\mapsto -1\\
3 &\mapsto 2\\
4 &\mapsto -2\\
\vdots & \quad 3\\
& \quad -3\\
& \quad \vdots
\end{aligned}
$$

„kleiner gleich"

Def 8.1.2: (a) Eine Relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge M ist eine partielle Ordnung auf M, wenn für alle $a,b,c \in M$ gilt:

(i) $a \preccurlyeq a$ (Reflexivität)

(ii) $a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$ (Transitivität)

(iii) $a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a \Rightarrow a = b$ (Antisymmetrie)

$(a \succcurlyeq b :\Leftrightarrow b \preccurlyeq a)$

(b) Eine partielle Ordnung heißt totale Ordnung, wenn außerdem für alle $a,b \in M$ gilt:

$a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$ (Totalität)

(c) Man nennt dann $(M, \preccurlyeq)$ (oder auch M) eine partiell bzw

falls klar ist, welche Relation gemeint ist.

Total-Ordnung oder partiell bzw. total geordnete Menge

Bsp.: $\mathbb{R}$ ist eine total geordnete Menge (bzgl. $\leq$)

Bsp. 8.1.3: Ist M eine beliebige Menge von Mengen, so ist $(M, \subseteq)$ eine partielle Ordnung.

Def 8.1.4: Sei $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung.

(a) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt Kette, wenn $(A, \preceq)$ total geordnet ist.

(b) Sei $A \subseteq M$. Ein Element $b \in M$ heißt obere Schranke von A, wenn für alle $a \in A$ gilt: $b \succeq a$

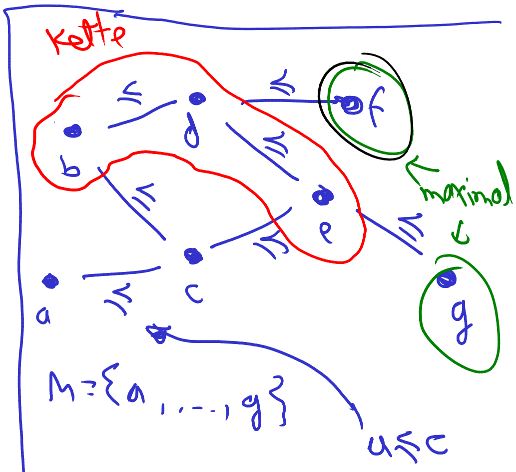
Analog: untere Schranke

(c) Ein Element $m \in M$ heißt maximal, wenn kein $a \in M$ existiert mit $a \succeq m$ aber $a \neq m$

Analog: minimal

(d) Ein Element $m \in M$ heißt größtes Element, wenn für alle $a \in M$ gilt: $a \preceq m$.

Analog: kleinstes Element



- Obere Schranke von $\{b, d, e\}$ ist e oder g.
- Obere Schranke von $\{a, d\}$ ist z.B. e
- größtes Elem. existiert nicht.

Bem 8.1.5: Jede endliche Totalordnung besitzt ein kleinstes und ein größtes Element.

Satz 8.1.6 (Zorns Lemma): Ist $(M, \preceq)$ eine nicht-leere partiell geordnete Menge, so dass jede Kette eine obere Schranke besitzt, so besitzt M (mindestens) ein maximales Element.

Bew-Idee:

Wähle irgend ein $a_1 \in M$. Falls a_1 maximal: fertig.

Sonst existiert $a_2 \in M$ mit $a_2 \gneq a_1$. Falls a_2 maximal: fertig.

Sonst finde $a_3 \gneq a_2$ etc.

Finde $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit:

$a_1 \lneq a_2 \lneq a_3 \lneq a_4 \lneq \dots$

$\{a_1, a_2, \dots\}$ bilden eine Kette, also existiert eine obere Schranke b_1.

Falls b_1 maximal: Fertig. Sonst: finde $b_2, b_3, \dots$

- $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ bilden eine Kette. Finde obere Schranke c_1. etc. etc

Konstruiere auf diese Art eine immer längere Kette.

- Wenn wir nie ein maximales Element von M finden würden, hätten wir irgendwann eine Kette $A \subseteq M$ mit $\#A > \#M$. ↯

Satz 8.1.7 (Basisergänzungssatz; vgl. 3.4.4) Sei V ein K-VR, seien $I_0 \subseteq I$ Mengen und seien $v_i \in V$ $(i \in I)$ s.d. $(v_i)_{i\in I_0}$ l.u. ist und $(v_i)_{i\in I}$ erzeugt ganz V.
Dann existiert eine Basis von V der Form $(v_i)_{i\in I'}$ für $I_0 \subseteq I' \subseteq I$.

Korollar 8.1.8 (vgl. 3.4.5): Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Bew von 8.1.8 aus 8.1.7: Wähle I und v_i so, dass $\{v_i \mid i \in I\} = V$ und $I_0 = \emptyset$.

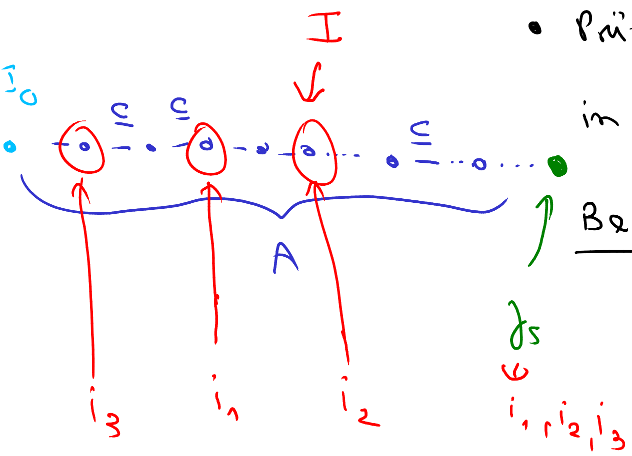
Bew von 8.1.7: Sei M die Menge aller Teilmengen J von I, so dass $(v_i)_{i\in J}$ l.u. ist und $I_0 \subseteq J$ ist.
Wir wollen 8.1.6 auf $(M, \subseteq)$ anwenden.

- Ist $J \in M$ maximal, so ist $(v_i)_{i \in J}$ eine Basis von V.

Begründung: Wenn $(v_i)_{i\in J}$ keine Basis von V wäre, gäbe es ein $i_0 \in I$ mit $v_{i_0} \notin \langle v_i \mid i \in J\rangle_K$. Dann wäre $(v_i)_{i \in J'}$ l.u., für $J' = J \cup \{i_0\}$.

Also $J' \in M$. Da $J' \supsetneq J$ ist das ein Widerspruch dazu, dass J maximal ist.

- Bleibt also, die Voraussetzungen von 8.1.6 zu prüfen.
  - $M \neq \emptyset$, da $I_0 \in M$.
  - Prüfe, dass jede Kette $A \subseteq M$ eine obere Schranke in M besitzt:



<u>Beh:</u> $J_s := \bigcup_{J \in A} J$ ist eine Schranke in M von A.

- $J_s \supseteq J$ für alle $J \in A$. Bleibt also z.z.: $J_s \in M$.
- $I_0 \subseteq J_s$ ist klar. Bleibt z.z.: $(v_i)_{i \in J_s}$ l.u.
- Ann.: $(v_i)_{i\in J_s}$ wäre lin. abh., d.h.

  ex. $r_i \in K$ s.d. $\sum_{i \in J_s} r_i v_i = 0$ mit:

  - nicht alle r_i sind 0
  - fast alle r_i sind 0.
- D.h. ex. $i_1, \dots, i_\ell \in J_s$ s.d. $v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}$ lin. abh. sind. (Nimm diejenigen i_k mit $r_{i_k} \neq 0$)
- Da $i_k \in J_s$ ist, ex. ein $I_k \in A$ mit $i_k \in I_k$.
- Nach Bem 8.1.5 hat $\{I_1, I_2, \dots, I_\ell\} \subseteq A$ ein größter Element $I_g \in$
- Also: $i_k \in I_k \subseteq I_g$ für $k = 1, \dots, \ell$

  Widerspruch zu: $I_g \in M$, da $v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}$ l. abh.

$\square$

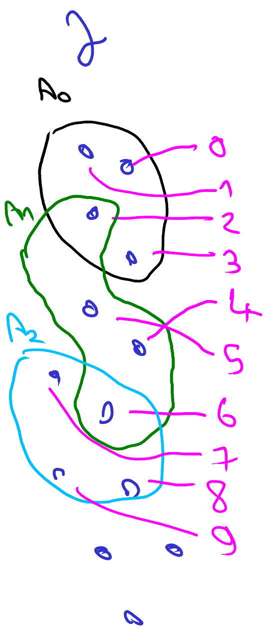
Nenne solche V abzählbar-unendlich-dimensional; Notation: $\dim V = \aleph_0$

<u>Lemma 8.1.9 (vgl. 3.4.7):</u> Ist V ein VR, der eine abzählbar unendliche Basis besitzt, so ist jede Basis von V abzählbar unendlich.

Bew.: • Sei $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von V und $(w_j)_{j\in J}$ eine beliebige Basis von V. Zeige: J ist abzählbar unendlich.

• J ist nicht endlich. (Sonst wäre jede Basis von V endlich. $\lightning$)

• Wir konstruieren eine Bijektion $f: J \to \mathbb{N}$ wie folgt:



- Wähle $A_0 \subseteq J$ endlich, so dass $v_0 \in \langle w_j \mid j \in A_0 \rangle_K$
  (Da die w_j ganz V erzeugen, lässt sich v_0 schreiben als $v_0 = \sum_{j\in J} r_j w_j$, wobei fast alle $r_j = 0$ sind. Wähle A_0 so, dass $j \in A_0$ ist falls $r_j \neq 0$ ist.)
- Definiere $f|_{A_0}$ als eine Bijektion $A_0 \longrightarrow \{0, 1, \dots, \#A_0 - 1\}$
- Wähle $A_1 \subseteq J$ endlich, so dass $v_1 \in \langle w_j \mid j \in A_1 \rangle_K$
- Setze $f|_{A_0}$ fort zu einer Bijektion
  $f|_{A_0\cup A_1}: A_0 \cup A_1 \longrightarrow \{0, \dots, \#(A_0 \cup A_1) - 1\}$
- Wiederhole dies für alle $n \in \mathbb{N}$:
  - Wähle $A_n \subseteq J$ endlich, so dass $v_n \in \langle w_j \mid j \in A_n \rangle_K$
  - Setze $f|_{A_0\cup\dots\cup A_{n-1}}$ fort zu einer Bijektion
    $f|_{A_0\cup\dots\cup A_n}: A_0 \cup \dots \cup A_n \longrightarrow \{0, \dots, \#(A_0 \cup \dots \cup A_n) - 1\}$

• Insgesamt erhalte eine Injektion $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \longrightarrow \mathbb{N}$.

• Zeige jetzt: $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = J$. (Da J unendlich ist, habe dann die gewünschte Bij $f: J \to \mathbb{N}$)

• Ann: $j_0 \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Dann: $v_i \in \langle w_j \mid j \in J \setminus \{j_0\} \rangle_K$ für alle i.

• Da die v_i ganz V erzeugen, ist also auch $\langle w_j \mid j \in J \setminus \{j_0\} \rangle_K = V$, Widerspruch zu: $(w_j)_{j\in J}$ eine Basis bilden.

$\square$

Bsp 8.1.10: $\dim K^{\mathbb{N}} > \aleph_0$, d.h. $K^{\mathbb{N}}$ hat keine abzählbare Basis.

$K^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \in K\}$

Insbes.: $\underbrace{(1,0,0,0,\dots)}_{v_0}, \underbrace{(0,1,0,0,\dots)}_{v_1}, \underbrace{(0,0,1,0,0,\dots)}_{v_2}, \dots$ ist keine Basis von $K^{\mathbb{N}}$

$\left((1,1,1,\dots) \notin \underbrace{\langle v_i \mid i\in\mathbb{N}\rangle_K}_{= K^{\oplus\mathbb{N}}} \right)$

Bew.: Seien $v_i \in K^{\mathbb{N}}$ beliebig, für $i\in\mathbb{N}$. Wir konstruieren ein $w\in K^{\mathbb{N}}$ mit $\underbrace{w}_{= (b_j)_{j\in\mathbb{N}}} \notin \langle v_i \mid i\in\mathbb{N}\rangle_K$

Für jedes $n\in\mathbb{N}$ (der Reihe nach): Lege endlich viele b_j so fest, dass $w \notin \langle v_0,\dots,v_{n-1}\rangle_K$:

Im n-ten Schritt:

- Wir nehmen an, $b_0,\dots,b_{m-1}$ sind schon festgelegt.
- Sei $\pi: K^{\mathbb{N}} \to K^{n+1}$

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto (a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n})$$

Wähle $b_m,\dots,b_{m+n}$ so, dass $(b_m,\dots,b_{m+n}) \notin \underbrace{\langle \pi(v_0),\dots,\pi(v_{n-1})\rangle_K}_{\dim \le n,}$

also $\langle \pi(v_0),\dots,\pi(v_{n-1})\rangle_K \subsetneq K^{n+1}$,

also existieren solche $b_m,\dots,b_{m+n}$

- Dadurch habe sichergestellt: $\pi(w) \notin \langle \pi(v_0),\dots,\pi(v_{n-1})\rangle_K$

$\Rightarrow w \notin \langle v_0,\dots,v_{n-1}\rangle_K$

Def 8.9: Ist I eine Menge und sind A_i Mengen für alle $i\in I$, so definiert man das Produkt $\prod_{i\in I} A_i := \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i\in I: a_i\in A_i\}$

Def 8.1.11: Sei I eine Menge und seien V_i K-VR für jedes $i\in I$. Dann definieren wir die folgenden K-VR:

(a) das (direkte) Produkt

$$\prod_{i\in I} V_i := \{(v_i)_{i\in I} \mid \forall i\in I: v_i\in V_i\}$$

(b) die (direkte) Summe (auch: „Koprodukt")

$$\bigoplus_{i\in I} V_i := \{ (v_i)_{i\in I} \mid \forall i\in I: v_i \in V_i, \text{ fast alle } v_i \text{ sind } 0 \}$$

$$\coprod_{i\in I} V_i$$

Wie üblich schreibt man auch $\prod_{i=1}^{n} V_i$, $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ etc...

Sind alle $V_i = V$, so schreibt man auch $V^I := \prod_{i\in I} V_i$

und $V^{\oplus I} := \bigoplus_{i\in I} V_i$

Bem 8.1.12: $\prod_{i=1}^{n} V_i = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$

Satz 8.1.13: Seien V_i und W K-VR $(i\in I)$.

(a) Habe eine kanonische Bijektion

$$\mathrm{Hom}(W, \prod_{i\in I} V_i) \xrightarrow{1:1} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(W, V_i)$$

$$f \longmapsto (g_i)_{i\in I} \quad \text{mit } f(w) = (g_i(w))_{i\in I}$$

(b) Habe eine kanonische Bijektion

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} V_i, W) \xrightarrow{1:1} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, W)$$

$$f \longmapsto (g_i)_{i\in I} \quad \text{mit}$$

$$f((v_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} g_i(v_i)$$

Bew: Sei $\pi_j : \prod_{i\in I} V_i \longrightarrow V_j$, $(v_i)_{i\in I} \longmapsto v_j$

(a) Durch $g_i := \pi_i \circ f$ wird die Abb. von links nach rechts definiert.
Die Abb von rechts nach links ist, $f: w \longmapsto (g_i(w))_{i\in I}$

(b) Abb von rechts nach links wird definiert durch

$f\left((v_i)_{i\in I}\right) := \sum_{i\in I} g_i(v_i)$ Diese Summe ist wohldef, da: Fast alle v_i sind 0, also auch fast alle $g_i(v_i)$.

Abb von links nach rechts: Geg.: $f: \bigoplus_i V_i \to W$

Definiere $g_j: V_j \to W$ durch $g_j(v_j) := f\left((v_i')_{i\in I}\right)$ wobei

$$v_i' = \begin{cases} v_j & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i\neq j. \end{cases}$$

__Bsp:__ $V_i = K$, $W=K$, $I=\mathbb{N}$

$f: K^{\oplus\mathbb{N}} \to K$, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} g_i(a_i)$

für $g_i: \underset{\overset{\shortparallel}{V_i}}{K} \to K$, $a_i \mapsto a_i$

Wende darauf auf f die kanonische Abb. $\mathrm{Hom}(K^{\oplus\mathbb{N}}, K) \to \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(K,K)$:

$g_j(a_j) = f\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)$ mit $a_i = \begin{cases} a_j & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$= \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i = a_j$