

## § 8.2 Der Dualraum

Def 8.2.1 Der Dualraum eines  $K$ -VR  $V$  ist der  $K$ -VR  
 $V^* := \text{Hom}(V, K)$ .

„linke Seite einer linearen Gleichung“:

Bsp 8.2.2: Ist  $V = K^n$ , so ist  $V^* = K^{1 \times n}$ , d.h.

$$a \in V^* \text{ hat die Form } (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{K^n}$

Falls  $V$  endl-dim ist, ist zwar  $\dim V^* = \dim V$ , also ist  $V$  isomorph zu  $V^*$ , aber es gibt i.A. keinen natürlichen Isomorphismus.

Bsp:  $V =$  „Vektorraum der Abstände“

$\downarrow$   
 3m, 5cm  
 „  
 300cm

$$V^* = \text{Hom}(V, K)$$

„Vektorraum der Bildschirmauflösungen“

$\downarrow$

„12 Pixel pro cm“ = $\alpha$	$\alpha(5 \text{ cm}) = 60$
„100 Pixel pro m“ = „1 Pixel pro cm“	$\alpha(1 \text{ m}) = 100$

Def 8.2.3: Sind  $U, V$  VR und ist  $f \in \text{Hom}(U, V)$ , so definiert man die duale Abbildung  $f^* \in \text{Hom}(V^*, U^*)$  durch

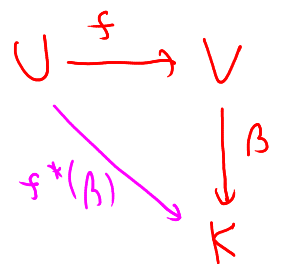
$$f^*(\beta) = \beta \circ f \quad \text{für } \beta \in V^*$$

Bsp 8.2.4: Die duale Abb. zu  $A: K^n \rightarrow K^m$

$$v \mapsto Av$$

ist die Abb.  $K^{1 \times m} \rightarrow K^{1 \times n}$

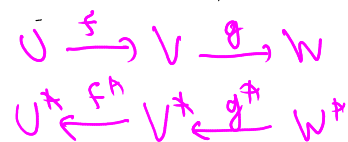
$$B \mapsto B \cdot A$$



Satz 8.2.5: Seien  $U, V, W$   $K$ -VR,  $f \in \text{Hom}(U, V)$ ,  $g \in \text{Hom}(V, W)$ . Dann:

(a)  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

(b)  $f^*$  injektiv  $\Leftrightarrow f$  surjektiv

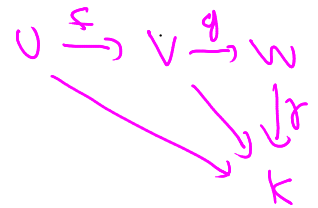


(c)  $f^*$  surjektiv  $\Leftrightarrow f$  injektiv

(d) sind  $U, V$  endl.-dim, so ist  $\text{rk } f^* = \text{rk } f$ .

Bew: (a)  $(g \circ f)^*(\gamma) = g \circ g \circ f = f^*(g^*(\gamma))$   
 $= (f^* \circ g^*)(\gamma)$

$g \in \text{Hom}(W, K)$



(c) „ $\Rightarrow$ “ Ann:  $f$  nicht injektiv, d.h. ex  $u \in U \setminus \{0\}$  mit  $f(u) = 0$

• Suche  $\alpha \in U^*$ , das nicht im Bild von  $f^*$  ist  
Wähle  $\alpha$  beliebig mit  $\alpha(u) \neq 0$ .

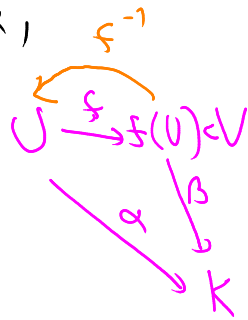
Da für jedes  $\beta \in V^*$ :  $(f^*(\beta))(u) = \beta(f(u)) = \beta(0) = 0$   
gilt, ist  $f^*(\beta) \neq \alpha$ , also  $f^*$  nicht surjektiv.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $\alpha \in U^*$ . Suche  $\beta \in V^*$  s.d.  $f^*(\beta) = \alpha$ ,  
d.h.  $\alpha = \beta \circ f$

Da  $f$  injektiv ist, definiert es einen Iso  
von  $U$  nach  $f(U)$ .

Durch  $\beta(f(u)) := \alpha(u)$  wird eine Abl.  
von  $f(U)$  nach  $K$  definiert.

Setze  $\beta$  beliebig auf ganz  $V$  fort.



(b) geht ähnlich. (Übung.)

(d) O.E.  $U = K^n, V = K^m$ . Dann ist  $f$  gegeben durch eine  
Matrix  $A \in K^{m \times n}$

Die duale Abb.  $f^*: K^{1 \times m} \rightarrow K^{1 \times n}$  ist gegeben durch

$$\alpha \longmapsto \alpha A$$

" "  
 $(A^T \alpha^T)^T$

Also  $\text{rk } f^* = \text{rk } A^T = \text{rk } A = \text{rk } f$

□

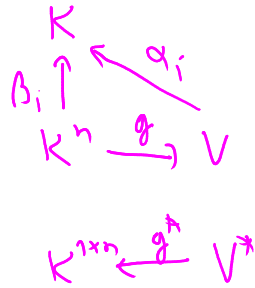
Notiz 8.2.6: Das Kronecker-Delta ist wie folgt definiert:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Satz 8.2.7: Ist  $V$  endl-dim  $K$ -VR und  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ , so existiert genau eine Basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  von  $V^*$  so dass gilt:  
 $\alpha_i(v_j) = \delta_{ij}$ . Insbes. ist  $\dim V^* = \dim V$ .

Bew: Sei  $g: K^n \rightarrow V$  der Isomorphismus mit  $g(e_i) = v_i$

$(e_i = \begin{pmatrix} \delta_{i,1} \\ \vdots \\ \delta_{i,n} \end{pmatrix} \in K^n)$ . Setze  $\beta_i := (\delta_{i,1} \dots \delta_{i,n}) \in K^{1 \times n}$  und  
 $\alpha_i := (g^*)^{-1}(\beta_i) = \beta_i \circ g^{-1}$



• Diese  $\alpha_i$  bilden eine Basis von  $V^*$ , da  $g^*$  ein Iso ist.

• Habe:  $\beta_i(e_j) = \delta_{ij}$

"
 
$$(0 \dots 1 \dots 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_j$$

•  $\Rightarrow \alpha_i(v_j) = (\beta_i \circ g^{-1})(g(e_j)) = (\beta_i \circ (g^{-1} \circ g))(e_j) = \beta_i(e_j) = \delta_{ij}$

• Eindeutigkeit von  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ : Die Bedingungen  $\alpha_i(v_1) = \delta_{i,1}, \dots, \alpha_i(v_n) = \delta_{i,n}$  legen  $\alpha_i$  auf einer Basis von  $V$  fest. Also ist  $\alpha_i$  ganz festgelegt.

Def 8.2.8: Die Basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  aus 8.2.7 nennt man die duale Basis zu  $v_1, \dots, v_n$ .

Bem 8.2.9: Ist  $V = K^{\oplus \mathbb{N}}$ , so ist  $V^* \cong K^{\mathbb{N}}$ . Insbes ist  $V^* \not\cong V$ .

Satz 8.2.10: Ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die duale Basis (von  $V^*$ ), so gilt für  $v \in V$ :

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i(v) \cdot v_i$$

Bew: Habe  $v = \sum_{j=1}^n r_j \cdot v_j$  für geeignete  $r_j \in K$ . Möchte zeigen:  $r_j = \alpha_j(v)$

$\alpha_i(v) = \alpha_i\left(\sum_{j=1}^n r_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=1}^n r_j \underbrace{\alpha_i(v_j)}_{\delta_{ij}} = r_i \alpha_i(v_i) = r_i$

□

Slogan:  ${}_n V^{**} = V$  falls  $V$  endl-dim

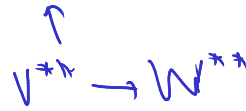
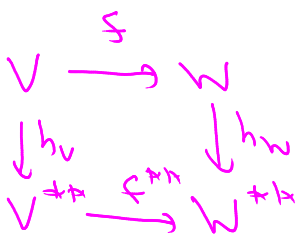
Def 8.2.11: Sei  $v \in V$ . Wir definieren die Evaluationsabbildung  
 $ev_v: V^* \rightarrow K$  durch  $ev_v(\alpha) := \alpha(v)$   
 (Evaluieren  $\alpha$  an  $v$ )

Also:  $ev_v \in V^{**}$

Satz 8.2.12: Sei  $V$  endl-dim

(a) Die Abb.  $h_v: V \rightarrow V^{**}, v \mapsto ev_v$  ist ein Isomorphismus.

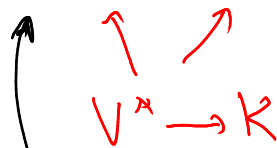
(b) Wenn wir jedem endl.-dim VR  $V$  mit  $V^{**}$  identifizieren,  
 gilt für  $f: V \rightarrow W$ :  $f^{**} = f$ . Genauer:  $f = h_W^{-1} \circ f^{**} \circ h_V$



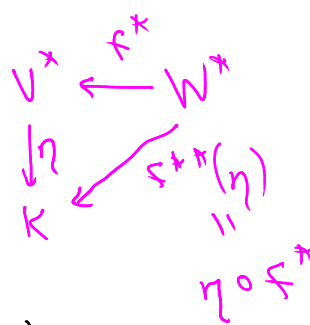
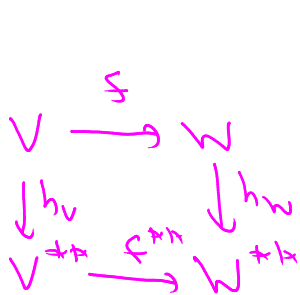
Bew: (a)  $h_v$  ist linear: nachrechnen.

Sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$  die duale Basis  
 und  $\eta_1, \dots, \eta_n \in V^{**}$  die duale Basis zu  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Beh:  $h_v(v_i) = \eta_i$  (Dann fertig, da dann  $h_v$  eine Basis von  
 $V$  auf eine Basis von  $V^{**}$  abbildet.)



Das folgt, wenn wir zeigen können:  $\forall j: (h_v(v_i))(\alpha_j) \stackrel{?}{=} \eta_i(\alpha_j)$



$ev_{v_i}(\alpha_j)$   
 $\alpha_j(v_i)$   
 $\delta_{ij}$   
 da  $\eta_i$  duale Basis von  $\alpha_j$   
 $\delta_{ij}$   
 $\square$

(b) z.z:  $h_w \circ f = f^{**} \circ h_v$

$$ev_{f(v)} = h_w(f(v)) \stackrel{?}{=} f^{**}(h_v(v)) = ev_v \circ f^*$$

$\in W^{**}, \text{ also } W^{**} \rightarrow K$

$$= ev_v = (\alpha \mapsto \alpha(v))$$

zu prüfen:  $(h_w(f(v)))(\beta) \stackrel{?}{=} (f^{**}(h_v(v)))(\beta)$  für alle  $\beta \in W^*$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \varrho_{V_{f(v)}}(\beta) & & \varrho_{V_v}(f^*(\beta)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \beta(f(v)) & & \varrho_{V_v}(\beta \circ f) \end{array}$$

$$(\beta \circ f)(v) = \beta(f(v))$$

□