§ 8.2 Der Dualraum

Def 8.2.1 Der <u>Dualraum</u> eines K-VR V ist der K-VR
$$V^* := \mathrm{Hom}(V, K).$$

„linke Seite einer linearen Gleichung":

Bsp 8.2.2: Ist $V = K^n$, so ist $V^* = K^{1\times n}$, d.h.
$a \in V^*$ hat die Form $\underset{\substack{\cap \\ K^n}}{(x_1, \dots, x_n)} \longmapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$

Falls V endl-dim ist, ist zwar $\dim V^* = \dim V$, also insbes V isomorph zu V^*, aber es gibt i.A. keinen natürlichen Isomorphismus.

<u>Bsp:</u> $V =$ „Vektorraum der Abstände"
$\ni$
3m, 5cm
$\shortparallel$
300 cm

$V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$
$\shortparallel$
$V^* =$ „Vektorraum der Bildschirmauflösungen"
$\ni$
„12 Pixel pro cm" $=: \alpha$ $\qquad$ $\alpha(5\,\mathrm{cm}) = 60$
„100 Pixel pro m" = „1 Pixel pro cm" $\qquad$ $\alpha(1\,\mathrm{m}) = 1200$

Def 8.2.3: Sind U, V VR und ist $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, so definiert man die <u>duale Abbildung</u> $f^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$ durch
$$f^*(\beta) = \beta \circ f \qquad \text{für } \beta \in V^*$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\beta)"'] & V \arrow[d, "\beta"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Bsp 8.2.4: Die duale Abb. zu $A : K^n \longrightarrow K^m$, $v \longmapsto Av$
ist die Abb. $K^{1\times m} \longrightarrow K^{1\times n}$, $B \longmapsto B \cdot A$

Satz 8.2.5: Seien U, V, W K-VR, $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann:
(a) $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
(b) f^* injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$
$$U^* \xleftarrow{f^*} V^* \xleftarrow{g^*} W^*$$

(c) f^* surjektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv

(d) Sind U, V endl.-dim, so ist $\operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} f$.

Bew: (a) $(g \circ f)^*(\gamma) = \gamma \circ g \circ f = f^*(g^*(\gamma))$ $\qquad \gamma \in \operatorname{Hom}(W, K)$

$= (f^* \circ g^*)(\gamma)$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[drr] & V \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & W \arrow[d, "\gamma"] \\ & & K \end{tikzcd}$$

(c) „$\Rightarrow$" Ann: f nicht injektiv, d.h. ex $u \in U \setminus \{0\}$ mit $f(u) = 0$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$
$$\begin{tikzcd} U^* & V^* \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

- Suche $\alpha \in U^*$, das nicht im Bild von f^* ist

Wähle α beliebig mit $\alpha(u) \neq 0$.

Da für jedes $\beta \in V^*$: $(f^*(\beta))(u) = \beta(f(u)) = \beta(0) = 0$ gilt, ist $f^*(\beta) \neq \alpha$, also f^* nicht surjektiv.

„$\Leftarrow$" Sei $\alpha \in U^*$. Suche $\beta \in V^*$ s.d. $f^*(\beta) = \alpha$, d.h. $\alpha = \beta \circ f$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & f(U) \subset V \arrow[l, bend right, "f^{-1}"'] \arrow[d, "\beta"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Da f injektiv ist, definiert es einen Iso von U nach $f(U)$.

Durch $\beta(f(u)) := \alpha(u)$ wird eine Abb. von $f(U)$ nach K definiert.

Setze β beliebig auf ganz V fort.

(b) Geht ähnlich. (Übung.)

(d) O.E. $U = K^n$, $V = K^m$. Dann ist f gegeben durch eine Matrix $A \in K^{m \times n}$

Die duale Abb. $f^*: K^{1 \times m} \to K^{1 \times n}$ ist gegeben durch

$$\alpha \longmapsto \alpha A = (A^T \alpha^T)^T$$

Also $\operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} A^T = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} f$ $\qquad \square$

Notn 8.2.6: Das Kronecker-Delta ist wie folgt definiert:

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Satz 8.2.7: Ist V endl-dim K-VR und $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von V, so existiert genau eine Basis $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ von V^* so dass gilt: $\alpha_i(v_j)=\delta_{ij}$. Insbes. ist $\dim V^* = \dim V$.

Bew: Sei $g: K^n \longrightarrow V$ der Isomorphismus mit $g(e_i)=v_i$

$\left(e_i = \begin{pmatrix}\delta_{i,1}\\ \vdots \\ \delta_{i,n}\end{pmatrix} \in K^n\right)$. Setze $\beta_i := \begin{pmatrix}\delta_{i,1} & \dots & \delta_{i,n}\end{pmatrix} \in K^{1\times n}$ und

$\alpha_i := (g^*)^{-1}(\beta_i) = \beta_i \circ g^{-1}$

$$\begin{tikzcd} & K \\ K^n \arrow[u, "\beta_i"] \arrow[r, "g"] & V \arrow[ul, "\alpha_i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^{1\times n} & V^* \arrow[l, "g^*"'] \end{tikzcd}$$

- Diese α_i bilden eine Basis von V^*, da g^* ein Iso ist.
- Habe: $\beta_i(e_j) = \delta_{i,j}$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ \begin{pmatrix}0 & \dots & 1 & \dots & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} \leftarrow j \\ \uparrow \\ i \end{array}$$

- $\Rightarrow \alpha_i(v_j) = (\beta_i \circ g^{-1})(g(e_j)) = (\beta_i \circ (g^{-1}\circ g))(e_j) = \beta_i(e_j) = \delta_{ij}$
- Eindeutigkeit von $\alpha_1,\dots,\alpha_n$: Die Bedingungen $\alpha_i(v_1)=\delta_{i1},\dots,\alpha_i(v_n)=\delta_{in}$ legen α_i auf einer Basis von V fest. Also ist α_i ganz festgelegt.

Def 8.2.8: Die Basis $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ aus 8.2.7 nennt man die <u>duale Basis</u> zu $v_1,\dots,v_n$.

Bem 8.2.9: Ist $V = K^{\oplus \mathbb{N}}$, so ist $V^* \cong K^{\mathbb{N}}$. Insbes ist $V^* \ncong V$.

Satz 8.2.10: Ist $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von V und $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ die duale Basis (von V^*), so gilt für $v\in V$:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i(v)\cdot v_i$$

Bew: Habe $v = \sum_{j=1}^n r_j v_j$ für geeignete $r_j \in K$. Möchte zeigen: $r_j = \alpha_j(v)$

Alle Summanden verschwinden, außer der mit $j=i$

$$\alpha_i(v) = \alpha_i\left(\sum_{j=1}^n r_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n r_j \underbrace{\alpha_i(v_j)}_{=\delta_{ij}} = r_i\,\alpha_i(v_i) = r_i$$

$\square$

Slogan: „$V^{**} = V$" falls V endl.-dim

Def 8.2.11: Sei $v \in V$. Wir definieren die Evaluationsabbildung $ev_v : V^* \longrightarrow K$ durch $ev_v(\alpha) := \alpha(v)$

(Evaluiere α an v)

Also: $ev_v \in V^{**}$

Satz 8.2.12: Sei V endl.-dim

(a) Die Abb. $h_V : V \longrightarrow V^{**}$, $v \longmapsto ev_v$ ist ein Isomorphismus.

(b) Wenn wir jeden endl.-dim VR V mit V^{**} identifizieren, gilt für $f : V \to W$: $\underset{\substack{\uparrow \\ V^{**} \to W^{**}}}{f^{**}} = f$. Genauer: $f = h_W^{-1} \circ f^{**} \circ h_V$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow h_V & & \downarrow h_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

Bew: (a) h_V ist linear: nachrechnen.

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V^*$ die duale Basis und $\eta_1, \dots, \eta_n \in V^{**}$ die duale Basis zu $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Beh.: $h_V(v_i) = \eta_i$ (Dann fertig, da dann h_V eine Basis von V auf eine Basis von V^{**} abbildet.)

$V^* \to K$

Das folgt, wenn wir zeigen können: $\forall j : \underbrace{(h_V(v_i))(\alpha_j)}_{= ev_{v_i}(\alpha_j) = \alpha_j(v_i) = \delta_{ji}} \overset{?}{=} \eta_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$

da η_i duale Basis von α_j □

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow h_V & & \downarrow h_W \\ V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \end{array}$$

$$V^* \xleftarrow{f^*} W^*, \quad \eta : V^* \to K, \quad f^{**}(\eta) = \eta \circ f^* : W^* \to K$$

(b) z.z.: $h_W \circ f \overset{?}{=} f^{**} \circ h_V$

$$ev_{f(v)} = h_W(f(v)) \overset{?}{=} f^{**}(\underbrace{h_V(v)}_{= ev_v = (\alpha \mapsto \alpha(v))}) = ev_v \circ f^*$$

$\in W^{**}$, also $W^* \to K$

Zu prüfen: $\big(h_W(f(v))\big)(\beta) \overset{?}{=} \big(f^{**}(h_V(v))\big)(\beta)$ für alle $\beta \in W^*$

$$\big(h_W(f(v))\big)(\beta) = ev_{f(v)}(\beta) = \beta(f(v))$$

$$\big(f^{**}(h_V(v))\big)(\beta) = ev_v(f^*(\beta)) = ev_v(\beta \circ f) = (\beta \circ f)(v) = \beta(f(v))$$

$\square$