8.3 Skalarerweiterungen

Seien $K \subseteq L$ Körper.

Bsp.: • $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
(• $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$)

<u>Konvention 8.3.1:</u> Jeder L-VR ist auch ein K-VR.

Schreibe bei diversen Notationen L oder K dran, um klar zu machen, ob wir L- oder K-VR meinen:

- $\dim_L(V)$ $\dim_K(V)$ $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$ $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$
- $\mathrm{Hom}_L(V, W)$ $\mathrm{Hom}_K(V, W)$
- „L-Homomorphismen" „K-Homomorphismen"
  „L-linear" „K-linear"
- L-UVR K-UVR

Skalarerweiterung soll aus K^n L^n machen.

$\mathrm{Hom}_K(K^n, L^m) = \mathrm{Hom}_L(L^n, L^m)$

<u>Satz 8.3.2:</u> Sei V ein K-VR.

(a) Es existiert ein L-VR V', so dass V ein K-UVR von V' ist und so dass für jeden L-VR W gilt:

(*) Die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_L(V', W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W)$$
$$f \longmapsto f|_V$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

(b) Ist $V'' \supseteq V$ ein weiterer L-VR mit der obigen Eigenschaft, so existiert genau ein L-VR-Iso $f: V' \to V''$, der auf V die Identität ist.

<u>Def 8.3.3:</u> Der obige L-VR V' heißt <u>Skalarerweiterung</u> des K-VRs V nach L. Notation für V': V_L (Identifiziere verschiedene VR, die die Bed aus 8.3.2(a) erfüllen mit dem eindeutigen Iso aus 8.3.2 (b).)

(*) nennt man die <u>universelle Eigenschaft der Skalarerweiterung</u>.

Bsp 8.3.4: Für jede Menge I gilt: Die Skalarerweiterung nach L von $K^{\oplus I}$ ist $L^{\oplus I}$.

Bew (8.3.2): (a) Wähle eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V. Habe also einen Isomorphismus $g: K^{\oplus I} \longrightarrow V$

$$(r_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} r_i v_i \quad \text{(fast alle } r_i = 0\text{)}$$

Setze $V' := L^{\oplus I}$ und identifiziere V mit $K^{\oplus I} \subseteq L^{\oplus I}$ mit Hilfe von g.

- Prüfe (*): Sei also W ein L-VR.
- Ein $f \in \mathrm{Hom}_L(L^{\oplus I}, W)$ ist gegeben durch die Bilder der std-Basis e_i von $L^{\oplus I}$

$$e_i = (\delta_{ij})_{j\in I}$$

- Ein $f' \in \mathrm{Hom}_K(K^{\oplus I}, W)$ ist gegeben durch die Bilder der std-Basis e_i von $K^{\oplus I}$
- Also ist $f \longmapsto f|_{\underbrace{K^{\oplus I}}_{= V}}$ eine Bijektion.

(b) Habe

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "h"] & V'' \arrow[l, bend right, "h'"'] \\
V \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[ur, phantom, "\subseteq"] \arrow[ur, bend right, "\tilde{h}"']
\end{tikzcd} \quad \longleftarrow L\text{-VR mit (*)}$$

- Gesucht: L-Iso $h: V' \longrightarrow V''$
- Erhalte ein $h \in \mathrm{Hom}_L(V', V'')$ mit (*) aus einem $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}_K(V, V'')$ (s.d. $h|_V = \tilde{h}$)

  Wähle für $\tilde{h}$ die Inklusionsabbildung.

  $\Rightarrow$ Für $v \in V$: $h(v) = \tilde{h}(v) = v \in V''$, d.h. h ist auf V die Identität.
- Analog konstruiere ein $h' \in \mathrm{Hom}_L(V'', V')$, dass auf V die Identität ist.
- Zeige jetzt: • $h' \circ h: V' \longrightarrow V'$ ist die Identität

$$\begin{array}{ccc} \bullet\ h'\circ h \in \mathrm{Hom}_L(V',V') & & id_{V'} \in \mathrm{Hom}_L(V',V') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (h'\circ h)|_V \in \mathrm{Hom}_K(V,V') & & (id_{V'})|_V \in \mathrm{Hom}_K(V,V') \\ & & \| \\ & id_V & \end{array}$$

• Aus (*) folgt: $h'\circ h = id_{V'}$ (da das eine Bijektion ist)

• Analog: $h\circ h' = id_{V''}$

Also ist $h' = h^{-1}$; insbes ist h ein Iso.

• Eindeutigkeit des Isos $h \in \mathrm{Hom}_L(V', V'')$:

• Ann $h_2 \in \mathrm{Hom}_L(V', V'')$ ist ein weiterer Iso mit $h_2|_V = id_V$

• Dann zeigt das grüne Argument, angewandt auf h_2 statt h: $h' = h_2^{-1}$.

Also $h_2 = (h')^{-1} = h$. □

Aus $f: K^n \to K^m$, gegeben durch $A \in K^{m\times n} \subseteq L^{m\times n}$ erhalte $\underset{= f_L}{A}: L^n \to L^m$

Satz 8.3.5: Für K-VR V und W gilt: Jedes $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ lässt sich eindeutig zu einem $f' \in \mathrm{Hom}_L(V_L, W_L)$ fortsetzen.

Def 8.3.6: Dieses f' nennt man die Skalarenweiterung von f. Notation dafür: f_L

Bew 8.3.5: $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ lässt sich auch auffassen als K-Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W_L)$. Nach (*) (für V) lassen sich solche f eindeutig zu $f' \in \mathrm{Hom}_L(V_L, W_L)$ fortsetzen. □

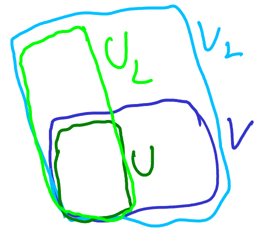
Bsp. 8.3.7:

Satz 8.3.8: Sei V ein K-VR, $U \subseteq V$ ein K-UVR.

(a) U_L ist der von U erzeugte L-UVR von V_L.

Außerdem gilt: $U = U_L \cap V$ Insbes: $U=V$ liefert: $\langle V\rangle_L = V_L$

(b) $(V/U)_L = V_L/U_L$. Ist $g: V \to V/U$ die kanonische Abb., so ist $g_L: V_L \to (V/U)_L = V_L/U_L$ auch die kanonische Abb.



<u>Bew:</u> (a) O.E.: $V = K^{\oplus I}$ und $U = K^{\oplus J}$ für $J \subseteq I$

Dann ist $V_L = L^{\oplus I}$ und $U_L = L^{\oplus J}$

In dieser Situation sieht man: U_L ist der von U erzeugte L-UVR von V_L und $U = U_L \cap V$. $\square$

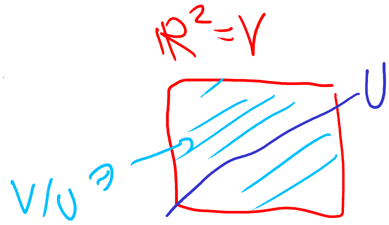
(b) Für „$(V/U)_L = V_L/U_L$" ist zu zeigen:

V_L/U_L erfüllt die univ. Eig. der Skalarerw. von V/U, d.h. (i) $V/U \subseteq V_L/U_L$ und (ii) für jeden L-VR W:

$$\mathrm{Hom}_L(V_L/U_L, W) \to \mathrm{Hom}_K(V/U, W)$$
$$f \mapsto f|_{V/U}$$

ist eine Bijektion.

Anders ausgedrückt: Jeder K-Homom. $h: V/U \to W$ lässt sich eindeutig zu einem L-Homom. $V_L/U_L \to W$ fortsetzen. ← z.z.



V/U ist dadurch charakterisiert, dass wir eine surjektive Abb. $g: V \twoheadrightarrow V/U$ mit $\ker g = U$ haben.

(i)
$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "g"'] \arrow[dr] & \subseteq V_L \arrow[d, "\tilde g"] \\ V/U \arrow[r, dashed] & V_L/U_L \end{tikzcd}$$

Für $v_1, v_2 \in V$: $\tilde g(v_1) = \tilde g(v_2)$
$\iff v_1 - v_2 \in U_L$
$\iff v_1 - v_2 \in U$
$\iff g(v_1) = g(v_2)$

(ii) Sei also
$$\begin{tikzcd} & \bar v \arrow[r, mapsto, "h"] & \cdots \\ v \arrow[ur, mapsto] & V/U \arrow[r, "h"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & W \\ V \arrow[ur, "g"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & V_L/U_L \arrow[ur, dashed, "\tilde h"'] & \\ V_L \arrow[ur, "\tilde g"] \arrow[uurr, bend right, "\tilde f"'] & & \end{tikzcd}$$
gegeben.

Habe $h \circ g: V \to W$. Univ. Eig von V_L liefert Fortsetzung davon zu $\tilde f: V_L \to W$

Möchte, dass $\tilde f$ auch eine Abb V_L/U_L nach W definiert; dazu z.z.: Sind $v_1, v_2 \in V_L$ mit $v_1 - v_2 \in U_L$, so ist $\tilde f(v_1) = \tilde f(v_2)$

Anders ausgedrückt: z.z.: $U_L \subset \ker \tilde f$

- $U \subset \ker(h \circ g) \Rightarrow U \subset \underbrace{\ker \tilde{f}}_{L\text{-UVR von } V_L}$

$\Rightarrow \ker \tilde{f}$ enthält den von U erzeugten L-UVR $\langle U \rangle_L \subseteq V_L$

$$\langle U \rangle_L = U_L$$

Habe also gezeigt: $U_L \subset \ker \tilde{f}$

- Also erhalte eine Abb $\tilde{h} : V_L / U_L \to W$ mit $\tilde{h} \circ \tilde{g} = \tilde{f}$

- <u>Beh.</u>: $\tilde{h}$ setzt h fort:

z.z.: Für $\bar{v} \in V/U$ gilt: $\tilde{h}(\bar{v}) \overset{?}{=} h(\bar{v})$

$\bar{v} = g(v)$, $\tilde{h}(\bar{v}) = \tilde{h}(g(v))$, $h(\bar{v}) = h(g(v)) = \tilde{f}(v) = \tilde{h}(\tilde{g}(v))$, $\tilde{h}(g(v)) = \tilde{h}(\tilde{g}(v))$

- Eindeutigkeit von $\tilde{h}$:

$$\mathrm{Hom}_K(V/U, W) = \{ f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid U \subset \ker f \}$$

$$\mathrm{Hom}_L(V_L/U_L, W) = \{ \tilde{f} \in \mathrm{Hom}_L(V_L, W) \mid \underbrace{U \subset \ker \tilde{f}}_{\Updownarrow \; U_L \subset \ker \tilde{f}} \}$$

- Da $\tilde{g} : V_L \to V_L / U_L$ die Abb. $g : V \to V/U$ fortsetzt, gilt: $\tilde{g} = g_L$ $\square$

<u>Satz 8.3.9</u> Für K-VR U, V, W und $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gilt:

(a) $\dim_L V_L = \dim_K V$

(b) $(g \circ f)_L = g_L \circ f_L$ und $(\mathrm{id}_V)_L = \mathrm{id}_{(V_L)}$

(c) $\ker(f_L) = (\ker f)_L$

(d) $\mathrm{im}(f_L) = (\mathrm{im} f)_L$

(e) Falls U, V endl.-dim: $\mathrm{rk}\, f_L = \mathrm{rk}\, f$

Bew: (a) Nach Konstruktion aus Bew. von 8.3.2

(b) $g_L \circ f_L$ ist eine Fortsetzung von $g \circ f$ zu einem L-Homom. $U \to W$. Also ist er gleich $(g \circ f)_L$ (da $(g \circ f)_L$ die einzige Fortsetzung von $g \circ f$ zu einem L-Homom. ist).

Und mit dem gleichen Argument: $\mathrm{id}_{(V_L)}$ ist eine Fortz. von id_V, also muss es gleich $(\mathrm{id}_V)_L$ sein.

(c)+(d) Nach dem Homomorphiesatz (4.2.12) induziert f einen Isomorphismus $\tilde{f}$ von $U/\ker f$ nach $\operatorname{im} f$, d.h. wir können f als Verknüpfung von 2 Abbildungen schreiben:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & V \\
& U/\ker f \arrow[r, "\tilde{f}"] & \operatorname{im} f \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

kanonische Abb.

ein Iso

Das alles skalar-erweitern liefert:

$$\begin{tikzcd}
U_L \arrow[rr, "f_L"] \arrow[dr, "g_L"'] & & V_L \\
& (U/\ker f)_L \arrow[r, "\tilde{f}_L"] & (\operatorname{im} f)_L \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"]
\end{tikzcd}$$

Nach 8.3.8 (a) ist $(\operatorname{im} f)_L$

Nach 8.3.8 (b) habe diese Gleichheit, und g_L ist die kanonische Abb.

// $U_L/(\ker f)_L$

Insbes: g_L ist surjektiv und $\ker g_L = (\ker f)_L$

Da $\tilde{f}$ ein Iso ist, ist auch $\tilde{f}_L$ ein Iso. Das folgt aus (b): Ist $g = \tilde{f}^{-1}$, so habe $\tilde{f}_L \circ g_L = (\tilde{f} \circ g)_L = (\mathrm{id}_{\operatorname{im} f})_L = \mathrm{id}_{(\operatorname{im} f)_L}$ und analog $g_L \circ \tilde{f}_L = \mathrm{id}$ ... also ist g_L inverses von $\tilde{f}_L$

Insgesamt erhalten wir für $f_L = \tilde{f}_L \circ g_L$:

- Da $\tilde{f}_L$ ein Iso ist, ist $\ker(f_L) = \ker g_L = (\ker f)_L$
- Da g_L und $\tilde{f}_L$ surjektiv sind, ist $\operatorname{im} f_L = (\operatorname{im} f)_L$

genauer: surjektiv als Abb. nach $(\operatorname{im} f)_L$

(e) Habe $\operatorname{rk} f \underset{\text{Def vom Rang}}{=} \dim(\operatorname{im} f) \underset{\text{Teil (a)}}{=} \dim(\operatorname{im} f)_L \underset{\text{Teil (d)}}{=} \dim \operatorname{im}(f_L) \underset{\text{Def. vom Rang}}{=} \operatorname{rk} f_L$

<u>Korollar 8.3.10</u> Wir betrachten ein Gleichungssystem über K:

$Ax = b$, also ausführlich:
$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right)$$

$A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$

Wenn es Lösungen in L^n hat, dann auch in K^n

<u>Bew:</u>
- „Hat Lsg in K^n" bedeutet: ex. $x \in K^n$ s.d. $Ax = b$

  Anders ausgedrückt: $b \in \operatorname{im} A$
- Analog „Hat Lsg in L^n" $\iff$ ex. $x \in L^n$ s.d. $Ax = b$

  $\iff$ b liegt im Bild von A, wenn man A als Abb $L^n \to L^m$ auffasst, d.h. $b \in \operatorname{im} A_L$
- Wir haben also unser $b \in K^m$, wir nehmen an, dass $b \in \operatorname{im} A_L$ ist, und wir wollen zeigen: $b \in \operatorname{im} A$
- Habe $\operatorname{im} A \underset{\uparrow}{=} (\operatorname{im} A)_L \cap K^m \underset{\uparrow}{=} \operatorname{im}(A_L) \cap K^m$

  8.3.8 (a) angewandt auf $V = K^m \supset U = \operatorname{im} A$

  8.3.9 (d)

  b liegt hier und hier drin; also liegt es wie gewünscht hier drin. $\square$