8.4 Tensorprodukte

$\dim V_1 = n$

$\dim V_2 = m$

$\rightsquigarrow \dim(V_1 \oplus V_2) = n+m$

$\rightsquigarrow \dim(V_1 \otimes V_2) = n \cdot m$

Def 8.4.1: Seien $V_1, \dots, V_n, W$ K-VR. Eine Abb. $f: V_1 \times \dots \times V_n \to W$ heißt multilinear, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ und $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ gilt:

$$V_i \longrightarrow W, \quad v \longmapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

ist linear. (Die Menge aller multilin. Abb. $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ bildet einen K-VR.) Im Fall $n=2$ nennt man solche Abbildungen auch bilinear.

Wir schreiben $\mathrm{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ für die Menge der bilinearen Abb. von $V_1 \times V_2$ nach W.

Erinnerung: Eine Bilinearform auf V ist eine bilin. Abb. von $V \times V$ nach K.

Warnung: Multilin. Abb. $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ sind nicht linear als Abb. von K-VR $V_1 \times \dots \times V_n$ nach W (außer falls $n=1$).

Beispiel 8.4.2: Sind U, V, W K-VR, so sind die folgenden Abb. bilinear:

(a) $U \times \mathrm{Hom}(U,V) \longrightarrow V, \ (u, f) \longmapsto f(u)$

(b) $\mathrm{Hom}(U,V) \times \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,W), \ (f,g) \longmapsto g \circ f$

Bew (a): zu prüfen:
- Für festes $u \in U$ ist $f \longmapsto f(u)$ linear
- Für festes $f \in \mathrm{Hom}(U,V)$ ist die Abb. $u \longmapsto f(u)$ linear.

Beides: Klar.

Bem 8.4.3: „Sinnvolle" Verknüpfungen von multilin. Abb. sind wieder multilinear. Z.B.

Seien die folgenden Abb. multilinear:

$$f: V_1 \times V_2 \longrightarrow W \qquad h: W \to W'$$
$$g_1: V_1' \to V_1 \qquad f': W \times V_3 \to W''$$
$$g_2: V_2' \longrightarrow V_2$$

Dann sind auch die folgenden Abb. multilinear:

$$(v_1', v_2') \longmapsto f(g_1(v_1'), g_2(v_2'))$$
$$(v_1, v_2) \longmapsto h(f(v_1, v_2))$$
$$(v_1, v_2, v_3) \longmapsto f'(f(v_1, v_2), v_3)$$

Lemma 8.4.4: Seien V, V', W K-VR, $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $(v_j')_{j\in J}$ eine Basis von V'.
Seien außerdem $w_{i,j} \in W$ für $i \in I, j \in J$.
Dann existiert genau eine bilineare Abb. $f: V \times V' \to W$ mit $f(v_i, v_j') = w_{i,j}$ für $i\in I$, $j \in J$.

Bew: • Definiere f wie folgt:

Sei $v = \sum_{i\in I} r_i v_i \in V$, $v' = \sum_{j\in J} s_j v_j' \in V'$

(*)

Setze $f(v, v') := \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} r_i s_j w_{i,j}$

Dann: • $f(v_i, v_j') = w_{i,j}$ ✓

• f bilinear: • Für $v' = \sum_{j\in J} s_j v_j'$ fest ist $v \longmapsto f(v, v')$ die lineare Abb, die gegeben ist durch: $v_i \longmapsto \sum_{j\in J} s_j w_{ij}$

• Für v fest: analog

• Eindeutigkeit: Aus der Bilinearität folgt, dass (*) gelten muss:

$$f(v,v') = f\Big(\sum_{i\in I} r_i v_i, v'\Big) = \sum_{i\in I} r_i f(v_i, v')$$
$$= \sum_{i\in I} r_i f\Big(v_i, \sum_{j\in J} s_j v_j'\Big) = \sum_{i\in I} r_i \sum_{j\in J} s_j f(v_i, v_j')$$

Satz 8.4.5: Seien U_1, U_2 K-VR

(a) Es existiert ein K-VR V und ein $f \in \mathrm{Bil}(U_1 \times U_2, V)$ so dass für jeden K-VR W gilt:

$U_1 \otimes U_2$ $\qquad$ $u_1, u_2 \mapsto u_1 \otimes u_2$

$$\text{„}\mathrm{Hom}(V, W) = \mathrm{Bil}(U_1 \times U_2, W)\text{"}$$

Formal: Die Abb. $\mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow \mathrm{Bil}(U_1 \times U_2, W)$

$$g \longmapsto \underbrace{g \circ f}_{(u_1,u_2) \mapsto g(u_1 \otimes u_2)}$$

ist eine Bijektion.

$$\begin{tikzcd} U_1 \times U_2 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & \\ V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

(b) Das Paar (V, f) aus (a) ist „eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus": Ist (V', f') ein weiteres Paar wie in (a) (insbes: $f' \in \mathrm{Bil}(U_1 \times U_2, V')$) so existiert genau ein Isomorphismus $h: V \longrightarrow V'$, so dass $h \circ f = f'$ gilt.

$$\begin{tikzcd} & U_1 \times U_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ V \arrow[rr, "h"] & & V' \end{tikzcd}$$

Def 8.4.6: Das V aus 8.4.5 (a) nennt man das <u>Tensorprodukt</u> von U_1 und U_2. Notation dafür: $U_1 \otimes U_2$. Die Abb. f aus (a) schreibt man als $u_1 \otimes u_2 := f(u_1, u_2) \in U_1 \otimes U_2$ für $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$.
Die Bedingung aus (a) nennt man die <u>universelle Eigenschaft des Tensorprodukts</u>

Bem: Ist V' auch wie in 8.4.5 (a), so identifizier V' mit V über den Isomorphismus h aus (b). Insbes wird $u_1 \otimes u_2 \in V'$ mit $u_1 \otimes u_2 \in V$ identifiziert.

$$\underset{\substack{\| \\ f'(u_1,u_2) \\ \| \\ h(f(u_1,u_2))}}{u_1 \otimes u_2} \in V' \qquad \underset{\substack{\| \\ f(u_1,u_2)}}{u_1 \otimes u_2} \in V$$

Bem 8.4.7: Seien $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$, $r \in K$. Dann gilt:

- $(r u_1) \otimes u_2 = f(r u_1, u_2) = r f(u_1, u_2) = r(u_1 \otimes u_2)$
- $u_1 \otimes (r u_2) = r(u_1 \otimes u_2)$
- $u_1 \otimes 0 = f(u_1, 0) = 0$
- $0 \otimes u_2 = 0$
- $(u_1 + u_1') \otimes u_2 = f(u_1 + u_1', u_2) = f(u_1, u_2) + f(u_1', u_2)$
  $= u_1 \otimes u_2 + u_1' \otimes u_2$

- $u_1 \otimes (u_2 + u_2') = u_1 \otimes u_2 + u_1 \otimes u_2'$

__Bew 8.4.5:__ (a) Sei $(u_{1i})_{i\in I}$ eine Basis von U_1 und $(u_{2j})_{j\in J}$ eine Basis von U_2.

Setze $V := K^{\oplus (I \times J)}$

Sei $(e_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ die Std-Basis von V.

Definiere f durch: $f(u_{1i}, u_{2j}) := e_{ij}$ $\quad u_{1i} \otimes u_{2j} = e_{ij}$

- Sei W gegeben. Prüfe die univ. Eig:

$g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist gegeben durch die $g(e_{i,j})$, für $i\in I, j\in J$

$$g(e_{i,j}) = g(f(u_{1i}, u_{2j}))$$

Eine Bil-Form $h: U_1 \times U_2 \to W$ ist gegeben durch $h(u_{1i}, u_{2j})$, für $i\in I, j \in J$

Das entspricht sich genau.

(b) Seien (V, f) und (V', f') gegeben

$$\begin{tikzcd} & U_1 \times U_2 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\ V \arrow[rr, shift left, "h"] \arrow[rrr, bend right, "id"'] & & V' \arrow[ll, shift left, "\tilde{h}"] \arrow[r, "\tilde{h}"] & V \end{tikzcd}$$

- Univ Eig von V mit $W = V'$ liefert:
  Ex. genau ein $h \in \mathrm{Hom}(V, V')$ s.d. $h \circ f = f'$.
  Bleibt z.z.: h ist Iso.
- Analog mit V, V' vertauscht: Ex. genau ein $\tilde{h} \in \mathrm{Hom}(V', V)$ mit $\tilde{h} \circ f' = f$
- Analog mit V, V liefert: id_V ist die einzige Abb $V \to V$, die $id_V \circ f = f$ erfüllt.
  Habe: $\tilde{h} \circ h : V \to V$ und $(\tilde{h} \circ h) \circ f = \tilde{h} \circ (h \circ f) = \tilde{h} \circ f' = f$
  Also $\tilde{h} \circ h = id_V$
- Analog erhalte: $h \circ \tilde{h} = id_{V'}$
- Habe also gezeigt: $\tilde{h}$ ist Inverses von h. $\square$

Satz 8.4.8: Seien U, V K-VR

(a) Ist $(u_i)_{i\in I}$ eine Basis von U, so lässt sich jedes $w \in U\otimes V$ eindeutig schreiben als $w = \sum_{i\in I} u_i \otimes v_i$ für geeignete $v_i \in V$, die fast alle 0 sind.

(b) Ist außerdem $(v_j)_{j\in J}$ eine Basis von V, so ist $(u_i \otimes v_j)_{i\in I, j\in J}$ eine Basis von $U \otimes V$

Bew: (b) folgt aus dem Beweis von 8.4.5(a)

(a) Schreibe
$$w = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} r_{ij}(u_i\otimes v_j) \overset{8.4.7(a)}{=} \sum_{i\in I}\underbrace{\sum_{j\in J}(u_i\otimes r_{ij}v_j)}$$
$$= \sum_{i\in I}\Big(\overbrace{u_i \otimes \underbrace{\sum_{j\in J} r_{ij} v_j}_{=: v_i}}\Big)$$

- Eindeutigkeit: Ist $w = \sum_i u_i \otimes v_i = \sum_i u_i \otimes v_i'$, so schreibe
$$v_i = \sum_j r_{ij} v_j \qquad v_i' = \sum_{j\in J} r_{ij}' v_j$$
Erhalte
$$w = \sum_{i,j} r_{ij}(u_i\otimes v_j) = \sum_{i,j} r_{ij}'(u_i\otimes v_j)$$
Da die $u_i\otimes v_j$ eine Basis von $U\otimes V$ bilden, folgt $r_{ij} = r_{ij}'$ und damit $v_i = v_i'$. $\square$

Satz 8.4.9: Sind $\underset{K\text{-VR}}{U} \xrightarrow{f} U'$, $V \xrightarrow{g} V'$ (Homom.), so existiert genau ein

$$h: U\otimes V \longrightarrow U'\otimes V' \quad \text{s.d. für } u\in U, v\in V \text{ gilt:}$$
$$h(u\otimes v) = f(u)\otimes g(v)$$

$$\begin{tikzcd}
U\otimes V \arrow[r, "h"] & U'\otimes V' \\
U\times V \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & U'\times V' \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$u\otimes v$
$\uparrow$
(u,v)

$(u,v) \longmapsto (f(u), g(v))$

Konvention 0.10: Ein Diagramm ist ein „Bild" bestehend aus Strukturen (z.B. VR) und Abbildungen dazwischen, als Pfeile gemalt.
Man sagt, das Diagramm kommutiert, wenn gilt:
Sind A und B zwei der Strukturen, und gibt es zwei verschiedene Wege von A nach B entlang der Pfeile:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[r, "f_2"] & \cdots \arrow[dr, "f_n"] & \\ A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & B \\ & \cdots \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[ur, "g_m"'] & \end{tikzcd}$$

, so sind die entsprechenden verknüpften Abbildungen gleich:

$$f_n \circ \dots \circ f_1 = g_m \circ \dots \circ g_1 : A \to B$$

Kommutiert ein Diagramm, so malt man $⦀$ oder $\circlearrowright$ rein.

Bew:

$$\begin{tikzcd} U \otimes V \arrow[r] & U' \otimes V' =: W \\ U \times V \arrow[u] \arrow[ur, "g"] \arrow[r] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "⦀"] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "⦀"] & U' \times V' \arrow[u] \\ (u,v) \arrow[r, mapsto] & (f(u), g(v)) \end{tikzcd}$$

Habe bil. Abb $g: U \times V \to U' \otimes V'$
$(u,v) \mapsto f(u) \otimes g(v)$

Aus univ. Eig folgt: ex. genau ein
$h: U \otimes V \to U' \otimes V'$ s.d. $h(u \otimes v) = g(u,v) = f(u) \otimes g(v)$

□

Def 8.4.10: Dieses h nennt man das Tensorprodukt von f und g.
Notation dafür: $f \otimes g$.

Satz 8.4.11: Seien V_1, V_2, V_3 K-VR. Dann gilt:

Genauer: Habe eindeutigen Iso h: linke Seite $\to$ rechte Seite

(a) $V_1 \otimes V_2 = V_2 \otimes V_1$ … mit $h(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$

(b) $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ … mit $h(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$

(c) $(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 = (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3)$ … mit $h((v_1, v_2) \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_3, v_2 \otimes v_3)$

(d) $V_1 \otimes K = V_1$ … mit $h(v_1 \otimes 1) = v_1$

Anschauung: Sei $(v_{1i})_{i\in I}$ eine Basis von V_1

Sei $(v_{2j})_{j\in J}$ eine Basis von V_2

Sei $(v_{3l})_{l\in L}$ eine Basis von V_3

Habe jeweils eine natürliche Bij. zwischen den Basen der linken und rechten Seiten:

(a) Basis von $V_1\otimes V_2$: $v_{1i}\otimes v_{2j}$ $\big\}h$ $\big\}(i,j)\in I\times J$

— " — $V_2\otimes V_1$: $v_{2j}\otimes v_{1i}$

(b) — " — $V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$: $v_{1i}\otimes(v_{2j}\otimes v_{3l})$ $\big\}h$ $(i,j,l)\in I\times J\times L$

— " — $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$: $(v_{1i}\otimes v_{2j})\otimes v_{3l}$

(c) — " — $(V_1\oplus V_2)\otimes V_3$: $\begin{cases}(v_{1i},0)\otimes v_{3l} & \leftarrow (i,l)\in I\times L\\ (0,v_{2j})\otimes v_{3l} & \leftarrow (j,l)\in J\times L\end{cases}$ h

— " — $(V_1\otimes V_3)\oplus V_2\otimes V_3$: $\begin{cases}v_{1,i}\otimes v_{3l}\\ v_{2,j}\otimes v_{3l}\end{cases}$ h

(d) — " — $V_1\otimes K$: $v_{1,i}\otimes 1$ $\big\}h$ $i\in I$

— " — V_1 : $v_{1,i}$

- Eindeutigkeit von h ist klar.
- Existenz von h: klar, wenn man die grüne Bed. nur für Basisvektoren fordert. Für andere Vektoren v_i: stelle v_i in der Basis dar und rechne nach.

d.h wende 8.4.5 an auf $V_1=U_1$, $V_2=U_2$. Dann $V=U_1\otimes U_2$

Bew. von (a) mit univ. Eig:

- Nach der univ. Eig von $V_1\otimes V_2$ ist eine lin. Abb.

$$V_1\otimes V_2 \longrightarrow V_2\otimes V_1 \overset{8.4.5}{=} W$$

mit $v_1\otimes v_2 \longmapsto v_2\otimes v_1$ $\Big\}$ Das wollen wir

gegeben durch eine bilin. Abb.

$$V_1\times V_2 \longrightarrow V_2\otimes V_1$$

mit $(v_1,v_2)\longmapsto v_2\otimes v_1$

Das ist das f aus 8.4.5 angewandt auf $U_1=U_2$, $V_2=U_1$

- Diese Abb ist in der Tat bilinear, da $(v_2,v_1)\longmapsto v_2\otimes v_1$ bilinear ist (nach Def. von $v_2\otimes v_1$).

Bem: Achtung: $V_1 \otimes V_2$ und $V_2 \otimes V_1$ sind zwar isomorph, aber wenn $V_1 = V_2 = V$ ist, ist dieser Isomorphismus $V \otimes V \to V \otimes V$ nicht die Identität (sondern: $v \otimes v' \mapsto v' \otimes v$ für $v, v' \in V$)

Bem 8.4.12: Sind $U_1, \dots, U_n, W$ K-VR, so habe

Damit meine ich: die Menge dieser multilin. Abb.

$$\mathrm{Hom}(U_1 \otimes \dots \otimes U_n, W) \;\text{,,}\!=\!\text{``}\; \{\text{Multilin. Abb. } U_1 \times \dots \times U_n \to W\}$$
$$g \longmapsto \big((u_1, \dots, u_n) \longmapsto g(u_1 \otimes \dots \otimes u_n)\big)$$

Satz 8.4.13: Sei V ein K-VR und $L \supseteq K$ ein Körper

Betrachte
$$V' := L \otimes_K V$$

Dieses K bedeutet, dass wir L und V als K-VR auffassen und einen K-VR V' erhalten.

Dieses V' lässt sich als L-VR auffassen mit der folgenden Skalarmultiplikation: Für $r \in L$ ist die Abb. $V' \to V'$, $v' \mapsto r \cdot v'$ gegeben als $\underbrace{(s \mapsto r \cdot s)}_{L \to L} \otimes \underbrace{\mathrm{id}_V}_{V \to V}$.

Anders ausgedrückt: Für $s \otimes v \in L \otimes_K V$ habe
$$r \cdot (s \otimes v) = r \cdot s \otimes v$$

Dieser L-VR V' ist die Skalarerweiterung von V.

Bew: Seien $r, r' \in L$, $w, w' \in V'$. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V

$$w = \sum_{i \in I} (s_i \otimes v_i), \quad w' = \sum_{i \in I} (s_i' \otimes v_i)$$

Prüfe die VR-Axiome: rot = neu definierte Skal.-Mult.

- $(r \cdot r') \cdot w \overset{?}{=} r \cdot (r' \cdot w)$

$$(r \cdot r') \cdot w = (r \cdot r') \cdot \sum_i (s_i \otimes v_i) = \sum_i \big((r \cdot r') \cdot s_i \otimes v_i\big)$$
$$r \cdot (r' \cdot w) = r \cdot \Big(r' \cdot \sum_i (s_i \otimes v_i)\Big) = r \cdot \sum_i (r' s_i \otimes v_i)$$
$$\sum_i \big((r \cdot r') \cdot s_i \otimes v_i\big) = r \cdot \sum_i (r' s_i \otimes v_i)$$

- etc.

Bleibt 2.7: V' ist die Skal-Erw. von V:

Muss dazu V als Teilmenge von V' auffassen. Identifiziere daher $v \in V$ mit $1 \otimes v \in V'$

Auf diese Art wird die K-Basis $(v_i)_{i\in I}$ von V zu einer L-Basis von V': $(1\otimes v_i)_{i\in I}$

8.4.8.(a)

$w \in V'$ lässt sich eindeutig schreiben als $\sum_{i\in I} s_i \otimes v_i \quad s_i \in L$

$$\sum_{i\in I} s_i \otimes v_i = \sum_{i\in I} s_i \cdot (1 \otimes v_i)$$

Linearkomb. der behaupteten Basisvektoren

Also ist V' die Skal-Erw. von V, nach Konstruktion der Skal-Erw.

Alternativ-Beweis mit univ. Eig:

- Prüfe, dass $V' = L \otimes_K V$ die univ. Eig. der Skalar-Erw. erfüllt. (aus 8.3.2)

  D.h. W sei ein L-VR. Jede K-lin. Abb. $g: V \to W$ lässt sich eindeutig zu einer L-lin. Abb. $\tilde{g}: V' \to W$ fortsetzen.
- Es soll also gelten: $\tilde{g}(1\otimes v) = g(v)$

  Da $\tilde{g}$ L-linear sein soll muss gelten, für $s \in L$

  $$\tilde{g}(s\otimes v) = \tilde{g}(s\cdot(1\otimes v)) = s\cdot \tilde{g}(1\otimes v)) = s\cdot g(v)$$
- Nach der univ. Eig. des Tensorprodukts existiert genau ein solches $\tilde{g}$ .... wenn wir gezeigt haben, dass die Abb. $L\times V \to W$, $(s,v) \mapsto s\cdot g(v)$ bilinear ist.

  Dass dies der Fall ist, ist klar.
- Bleibt zu prüfen, dass dieses $\tilde{g}$ L-linear ist, d.h. dass für beliebige $v' \in V'$: $\tilde{g}(r\cdot v') = r\cdot \tilde{g}(v')$. $(r \in L)$

  schreibe $v' = \sum s_i \otimes v_i$

  $$\tilde{g}(r\cdot v') = \tilde{g}\Big(\sum (rs_i \otimes v_i)\Big) = \sum \overbrace{\tilde{g}(rs_i \otimes v_i)}^{= rs_i\, \tilde{g}(1\otimes v_i)} = \sum \overbrace{r\, \tilde{g}(s_i \otimes v_i)}$$
  $$= r\, \tilde{g}\Big(\sum s_i \otimes v_i\Big) = r\cdot \tilde{g}(v')$$

□

Satz 8.4.14: Seien U, V K-VR. Betrachte

$$f: U^* \times V \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V)$$
$$(\alpha, v) \longmapsto (u \longmapsto \underbrace{\alpha(u)}_{\in K} v)$$

Diese Abb ist bilinear, d.h. sie induziert einen Homomorphismus

$$\tilde{f}: U^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V)$$

Ist U endl.-dim, so ist dies ein Isomorphismus.

Bew: Wähle eine Basis $u_1, \dots, u_n$ von U

Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die zugehörige duale Basis (von U^*)

(Erinnerung $\alpha_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$)

Definiere $g: \mathrm{Hom}(U,V) \longrightarrow U^* \otimes V$

$$h \longmapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes h(u_i)$$

Beh: g ist das Inverse von $\tilde{f}$.

Prüfe: (a) $g \circ \tilde{f} = id$

- Reicht zu prüfen: $g(\underbrace{\tilde{f}(\alpha_j \otimes v)}_{(u \longmapsto \alpha_j(u) \cdot v)}) \overset{?}{=} \alpha_j \otimes v$ für $v \in V$

Alle Summanden verschwinden außer der mit $i=j$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes (\alpha_j \underbrace{(u_i)}_{=\delta_{ij}} \cdot v)$$

$$= \alpha_j \otimes \alpha_j(u_j) v$$

(b) $\tilde{f} \circ g = id$

- $h \in \mathrm{Hom}(U,V)$ Prüfe $\tilde{f}(g(h)) \overset{?}{=} h$

$$\tilde{f}: \alpha \otimes v \longmapsto (u \longmapsto \alpha(u) v)$$

$$\underbrace{\tilde{f}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \otimes h(u_i)\right)}_{\sum_i \tilde{f}(\alpha_i \otimes h(u_i))}$$

$$\sum_i \left(u \longmapsto \alpha_i(u)\cdot h(v_i) \right)$$

$$\shortparallel$$

$$u \longmapsto \underbrace{\sum_i \alpha_i(u)\cdot h(v_i)}$$

$$h\Big(\underbrace{\sum_i \alpha_i(u)\cdot v_i}_{\overset{8.2.10}{=}\, u}\Big)$$

$\square$

Satz 8.4.15: Seien U, V K-VR

Sei $f \in \mathrm{Hom}(U^* \otimes V^*, \overbrace{(U\otimes V)^*}^{\mathrm{Hom}(U\otimes V, K)})$ dadurch definiert, dass

$$f(\alpha\otimes\beta) = \left(u\otimes v \longmapsto \alpha(u)\cdot\beta(v)\right). \qquad \text{für } \alpha\in U^*, \beta\in V^*$$

Sind U, V endl.-dim, so ist f ein Isomorphismus.

Bew: Sei $u_1,\dots,u_m$ eine Basis von U, $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ die zugehörige duale Basis von U^*

Sei $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von V, $\beta_1,\dots,\beta_n$ die zugehörige duale Basis von V^*

Definiere $g : (U\otimes V)^* \longrightarrow U^*\otimes V^*$

$$\gamma \longmapsto \sum_{i,j} \gamma(u_i\otimes v_j)(\alpha_i\otimes\beta_j)$$

Bleibt zu prüfen (a) $f\circ g = \mathrm{id}$ (b) $g\circ f = \mathrm{id}$

(a) Prüfe: $f(g(\gamma)) = \gamma$ für alle $\gamma \in (U\otimes V)^*$. Reicht zu prüfen, für k,l:

$$f(g(\gamma))(u_k\otimes v_l) \overset{?}{=} \gamma(u_k\otimes v_l)$$

$$\shortparallel$$

$$\Big(f\Big(\sum_{i,j} \overbrace{\gamma(u_i\otimes v_j)}^{\in K}(\alpha_i\otimes\beta_j)\Big)\Big)(u_k\otimes v_l)$$

$$\shortparallel$$

$$\Big(\sum_{i,j} \gamma(u_i\otimes v_j)\, f(\alpha_i\otimes\beta_j)\Big)(u_k\otimes v_l)$$

$$\sum_{i,j} \gamma(u_i\otimes v_j)\Big(\underbrace{\big(f(\alpha_i\otimes\beta_j)\big)(u_k\otimes v_l)}\Big)$$

Alle Summanden verschwinden außer $i=k, j=l$

$$\underbrace{\alpha_i(u_k)}_{\delta_{ik}} \cdot \underbrace{\beta_j(v_l)}_{\delta_{jl}}$$

$$= \gamma(u_k \otimes v_l).$$

(b) Übung. □

Bsp: Seien U, V, W endl-dim

Was ist $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V, U\otimes W) \otimes V^*, \mathrm{Hom}(W^*, V))$?

$$\underbrace{\underbrace{\mathrm{Hom}(V, U\otimes W)}_{V^* \otimes (U\otimes W)} \otimes V^*}_{V^*\otimes U \otimes W \otimes V^*}, \quad \underbrace{\mathrm{Hom}(W^*, V)}_{(W^*)^* \otimes V = W\otimes V}$$

$$\underbrace{(V^* \otimes U \otimes W \otimes V^*)^*}_{V^{**} \otimes U^* \otimes W^* \otimes V^{**}} \otimes W \otimes V$$

$$= V \otimes U^* \otimes W^* \otimes V \otimes W \otimes V$$

Bem 8.4.16: Die Bilinearformen auf V entsprechen genau den Elementen von $(V\otimes V)^* = V^* \otimes V^*$

falls V endl-dim

U, V, W endl-dim

- $\mathrm{Bil}(U \times V, W) = \mathrm{Hom}(U\otimes V, W) = (U\otimes V)^* \otimes W = U^* \otimes V^* \otimes W$