8.6 Algebren (über einem Körper)

Haben häufig mehr Struktur, als nur die eines K-Vektorraumes, nämlich auch noch eine zusätzliche Multiplikation. Das führt zu:

Def. 8.61:

Sei K ein Körper. Eine K-Algebra ist ein K-VR A zusammen mit einer Verknüpfung $\cdot : A \times A \to A$, genannt Multiplikation von A, und einem Element $1 \in A$, sodass folgende drei Bedingungen erfüllt:

(i) Die Multiplikation ist bilinear, d.h. es gelten

$$(\lambda a + a') \cdot b = \lambda(a \cdot b) + a' \cdot b$$

und

$$a \cdot (\lambda b + b') = \lambda(a \cdot b) + a \cdot b'$$

für alle $\lambda \in K$, und $a, a', b, b' \in A$.

(ii) Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. es gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

für alle $a, b, c \in A$.

(iii) Das Element $1 \in A$ ist neutral bzgl. der Multiplikation, d.h. es gilt

$$1 \cdot a = a = a \cdot 1$$

für alle $a \in A$.

Ist zusätzlich

(iv) Die Multiplikation ist kommutativ, d.h. es gilt

$$a \cdot b = b \cdot a$$

für alle $a, b \in A$

erfüllt, so nennt man A eine kommutative K-Algebra.

Bem. 8.6.2:

Ist $A \neq 0$, so kann man zeigen, dass $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1$ stets injektiv ist.

Die Multiplikation gibt einer K-Algebra A insbes. die Struktur eines Ringes und zwar so, dass sich der Körper K vermöge der Abbildung $K \to A$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot 1$ als Teilmenge von A auffassen lässt, falls $A \neq 0$. Alternativ könnten wir eine K-Algebra $A \neq 0$ auch als einen Ring A definieren, welcher den Körper K (als Unterring) enthält.

Bsp. 8.6.3:

(a) Jeder Körper L, welcher K enthält, ist eine K-Algebra.

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ $\Big\}$ komm. $\mathbb{Q}$-Algebren
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathbb{R}$-Algebra

(b) Der Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ über K in n Unbestimmten, welcher definiert ist als

$$K[x_1, \ldots, x_n] = \left\{ \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1, \ldots, i_n} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{i_1, \ldots, i_n} \in K \text{ und} \\ a_{i_1, \ldots, i_n} = 0 \text{ für alle} \\ \text{bis auf endl. viele} \\ (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \end{array} \right\},$$

ist ein komm. K-Algebra

(c) Der Vektorraum K^n ist ein komm. K-Algebra mit komponentenweiser Multiplikation

(d) Der Matrizenring $K^{n \times n}$ ist ein (i. A. ein nicht-kommutativer) K-Algebra

Notation 8.6.4:
Ist V ein K-Vektorraum, so setzen wir

$$V^{\otimes 0} = K \quad \text{und} \quad V^{\otimes n} = V^{\otimes (n-1)} \otimes V = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n \text{ mal}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$

Wir können all diese Tensorprodukte zu einer ein-

Zeigen K-Algebra zusammenfassen:

Def. 8.6.5:

Sei V ein K-Vektorraum. Der K-Vektorraum

$$T(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n} = K \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \_\_$$

zusammen mit der Multiplikation $T(V) \times T(V) \to T(V)$ induziert "$\otimes$", d.h.

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (v_n')_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\sum_{\ell+\ell'=n} v_\ell \otimes v_{\ell'}' \Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

$v_n, v_n' \in V^{\otimes n}$

$$= \big(v_0 \otimes v_0',\ v_0 \otimes v_1' + v_1 \otimes v_0',\ v_0 \otimes v_2' + v_1 \otimes v_1' + v_2 \otimes v_0',\ \_\_ \big),$$

bei 0-ter Komponente: Skalarmult.

ist ein K-Algebra

und dem Element $1 = (1, 0, 0, \_\_) \in T(V)$ wird Tensoralgebra oder freie Algebra über V genannt.

Bsp.:

0-dim. Fall

- $V \cong 0 \rightsquigarrow T(V) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{0^{\otimes n}}_{\cong 0 \text{ für } n \geq 1} \cong K$

1-dim. Fall

- $V \cong K \rightsquigarrow T(V) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{K^{\otimes n}}_{\cong K} \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K = \underbrace{K^{\oplus \mathbb{N}}}_{\text{mit geeigneter Multiplikation: "graduiert"}}$

Bem. 8.6.6:

Da $V = V^{\otimes 1}$, können wir V vermöge der Abbildung

$$V \to T(V),\ v \mapsto (0, v, 0, 0, \ldots)$$

als Untervektorraum von $T(V)$ auffassen

8.4.8 (b)

Wir wissen bereits, dass für ein K-Vektorraum V mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, eine Basis von $V^{\otimes n}$ durch die n-fachen Tensorprodukte $v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_n}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, gegeben ist. Dies liefert:

Satz 8.6.7:

Ist V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, so bilden die endlichen Produkte $v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_r}$, $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r \in I$, eine Basis von $T(V)$.

Def. 8.6.8:

Seien A und S K-Algebren. Eine lineare Abbildung $f: A \to S$ ist ein Homomorphismus von K-Algebren, falls folg. zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $f(a \cdot a') = f(a) f(a')$ für alle $a, a' \in A$.

(ii) $f(1) = 1$

Ist f zusätzlich bijektiv, so nennt man f eine

Isomorphismus von K-Algebren.

Bem. 8.6.9:
Um zu überprüfen, ob eine lin. Abbildung $f: A \to S$ ein Homomorphismus von K-Algebren ist, reicht es bei der Bedingung (i), diese auf einer Basis $(a_i)_{i \in I}$ von A zu überprüfen:
Die Zuordnungen

$$(a_i, a_j) \mapsto f(a_i)f(a_j) \quad \text{und} \quad (a_i, a_j) \mapsto f(a_i a_j)$$

sind bilinear und die Gleichheit bilinearer Abbildungen kann man auf einer Basis überprüfen.

Man kann sehr leicht Homomorphismen $\varphi: K[x_1, \dots, x_n] \to A$ von K-Algebren angeben, falls A kommutativ ist:

Ist A nicht-komm., so ersetze $K[x_1, \dots, x_n]$ durch den "nicht-komm." Polynomring $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$

als freie komm. K-Algebren

Satz 8.6.10 (universelle Eigenschaft von Polynomringen):
Ist A eine komm. K-Algebra und sind $x_1, \dots, x_n$ Unbestimmte, so lässt sich eine Abbildung $\{x_1, \dots, x_n\} \to A$ eindeutig zu einem Homomorphismus $K[x_1, \dots, x_n] \to A$ von K-Algebren fortsetzen.

Bew.:
Wir zeigen die Aussage für $n = 1$ (der allgemeine Fall lässt sich ganz analog zeigen). Sei $\tilde{\varphi}: \{x\} \to A$ eine Abbildung und betrachte

$$\varphi: K[x] \to A, \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n a_i \tilde{\varphi}(x)^i.$$

Dies ist ein Homomorphismus von K-Algebren (Blatt 1, A2). Bleibt zu zeigen, dass ein solches φ eindeutig ist. Seien also φ und ψ zwei solche Homomorphismen von K-Algebren, d.h. es gilt $\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) = \psi(x)$. Dann gilt

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^n a_i \varphi(x)^i = \sum_{i=0}^n a_i \tilde{\varphi}(x)^i = \sum_{i=0}^n a_i \psi(x)^i = \psi\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)$$

für alle Polynome $\sum_{i=0}^n a_i x^i \in K[x]$. Also $\varphi = \psi$.

$\square$

Bsp.:

Def. den Homomorphismus $\varphi: \mathbb{R}[x,y] \to \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{R}$-Algebren $x \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $y \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. Dann gilt z.B.

$$\begin{aligned}
\varphi(x^2y - 2xy^3 + x) &= \varphi(x)^2\varphi(y) - 2\varphi(x)\varphi(y)^3 + \varphi(x) \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}^3 + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\1\\-13\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wie steht es mit Homomorphismen $T(V) \to A$ von K-Algebren aus?

als freie Algebra über V

Satz 8.6.11 (universelle Eigenschaft der Tensoralgebra):

Sei V ein K-Vektorraum und A eine K-Algebra. Jede lineare Abbildung $f: V \to A$ lässt sich eindeutig zu einem Homomorphismus $\hat{f}: T(V) \to A$ von K-Algebren fortsetzen.

Bew.:

Blatt 10 Aufgabe 3.

Korollar 8.6.12:

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Jede lineare Abbildung $f: V \to W$ lässt sich eindeutig zu einem Homomorphismus $\tilde{f}: T(V) \to T(W)$ von K-Algebren fortsetzen.

Bew.:

angewandt auf $i \circ f$

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung und $i: W \to T(W)$ die Inklusionsabbildung. Dann liefert die univ. Eig. von $T(V)$ eind. Homomorphismus $\tilde{f}: T(V) \to T(W)$ mit $\tilde{f}|_V = i \circ f = f$

$\square$

Wir wollen nun zusätzliche Relationen in $T(V)$ haben. Dafür müssen wir uns überlegen, welche Art von Struktur wir "herausteilen" können. Bei Vektorräumen waren das einfach Unterverktorräume. Hier brauchen wir:

Ideale $\cap$ Kerne von Hom's von K-Algebren

Def. 8.6.13:
Sei A ein K-Algebra und I ein Untervektorraum von A. Wir nennen I ein (beidseitiges) Ideal von A, falls I unter beidseitiger Multiplikation mit Elementen von A abgeschlossen ist, also $a \cdot f \in I$ und $f \cdot a \in I$ für alle $a \in A$ und $f \in I$ gelten.

⚠ Einziges Ideal, welches auch eine "K-Unteralgebra" ist

Bsp. 8.6.14:

(a) $\underset{\text{Nullideal}}{0} \subseteq A$, $\underset{\text{Einsideal}}{A} \subseteq A$ (triviale Ideale)

(b) $f \in A \rightsquigarrow (f) \subseteq A$ ≙ von f erzeugtes Ideal

= kleinstes Ideal in A welches f enthält $\left(= \bigcap_{\substack{I \subseteq A \\ \text{Ideal mit} \\ f \in I}} I \right)$

$= \{afa' \mid a, a' \in A\}$ oder $\{af \mid a \in A\}$ im komm. Fall

Konkretes Bsp.:
$A = K[x] \rightsquigarrow (x) = \{g \in K[x] \mid g(0) = 0\}$

(c) $S \subseteq A$ Teilmenge $\rightsquigarrow (S) \subseteq A$ „von S erzeugtes Ideal

$$= \bigcap_{\substack{I \subseteq A \\ \text{Ideale mit} \\ S \subseteq I}} I$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i f_i a_i' \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_i, a_i' \in A, f_i \in S \text{ für alle } 1 \le i \le n \right\}$$

oder $\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_i \in A, f_i \in S \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \right\}$

im komm. Fall.

(d) Ist $f: A \to S$ ein Hom. von K-Algebren, so ist $\ker(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ ein Ideal von A.

Wissen, dass $\ker(f)$ ein UVR ist. Nun gilt offenbar

$$f(b \cdot a) = f(b)\underbrace{f(a)}_{=0} = 0 = \underbrace{f(a)}_{=0}f(b) = f(ab),$$

falls $a \in \ker(f)$, also $f(a) = 0$.

Bem. 8.6.15:

Um zu zeigen, dass ein Untervektorraum I einer K-Algebra A ein Ideal ist, reicht es zu zeigen, dass eine Basis f_j, $j \in J$, von I unter beidseitiger Multiplikation mit Elementen aus einer Basis a_k, $k \in \tilde{J}$, von A abgeschlossen ist.

$$a \in A, \quad f \in I$$

$$a = \sum_{k \in \tilde{J}} \mu_k a_k, \quad f = \sum_{j \in J} \lambda_j f_j$$

$$\leadsto a \cdot f = \Big(\sum_{k \in \tilde{J}} \mu_k a_k\Big)\Big(\sum_{j \in J} \lambda_j f_j\Big) = \underbrace{\sum_{k \in \tilde{J}} \sum_{j \in J} \mu_k \lambda_j \underbrace{a_k f_j}_{\in I \text{ per Ann.}}}_{\in I, \text{ da } I \text{ UVR}}$$

analog rechtsseitig

Satz 8.6.16:
Ist A eine K-Algebra und $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist die repräsentantenweise Multiplikation von Restklassen

$$A/I \times A/I \to A/I, \quad (a+I)\cdot(a'+I) \mapsto aa' + I$$

wohldefiniert und macht A/I zusammen mit $1+I$ zu einer K-Algebra. Insbesondere ist die kan: $A \to A/I$, $a \mapsto a+I$ ein Homom von K-Algebren.

Bew.:
Seien $a, a' \in A$ und $f, f' \in I$. Dann gilt

$$(a+f+I)(a'+f'+I) = (a+f)(a'+f') + I$$

$$= aa' + \underbrace{af'}_{\in I} + \underbrace{fa'}_{\in I} + \underbrace{ff'}_{\in I} + I$$

$$= aa' + I$$

$$= (a+I)(a'+I),$$

sodass die repr.weise Multiplikation wohldefiniert ist.
„A/I" ist K-Algebra:
Wissen, dass A/I ein Vektorraum ist. Restliche Axiome vererben sich von A.

$\square$

Bem. 8.6.17:
Der Isomorphiesatz/Homomorphiesatz aus Satz 4.2.12 gilt auch für K-Algebren und Hom. von K-Algebren, d.h., ist $f: A \to S$ ein Hom. von K-Algebren, so induziert f einen Isomorphismus

$$\tilde{f}: \underbrace{A/\ker(f)}_{\text{stets ein Ideal, siehe Bsp. 8.6.14 (d)}} \xrightarrow{\cong} \underbrace{\mathrm{im}(f)}_{\text{stets K-Algebra (Üb)}}, \quad a + \ker(f) \mapsto f(a)$$

ist $A/I \cong$ Körper, so nennt man I maximal (siehe Alg-Vorl.)

Bsp.:
- $K[x]/(x) \cong K$ induziert von $K[x] \to K$, $f \mapsto f(0)$ ✓
- Kann durch geeignete Quotientenbildung Elemente bzgl. der Multiplikation invertierbar machen:

  z.B.: $x \in K[x]$ ist nicht (mult.) invertierbar. Füge nun neue Unbestimmte y hinzu, welche das Inverse werden soll:

$$K[x] \subset K[x,y]$$

und erzwinge, dass $y = x^{-1}$ gilt:

$$K[x] \subset K[x,y] \twoheadrightarrow K[x,y]/(\underbrace{xy-1}_{=I})$$

hier gilt nun

$$(x+I)(y+I) = xy + I = xy - \underbrace{(xy-1)}_{\in I} + I$$

$= 1 + I$

$\rightsquigarrow y = x^{-1}$ in $K[x,y]/(xy-1)$

- Kann so auch Körper vergrößern, indem man Nullstellen von Polynomen hinzufügt (siehe Algebra-Vorl.)

Bsp.: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[x] \twoheadrightarrow \mathbb{Q}[x]/(x^2-2) = \underbrace{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}_{\text{kleinster Körper, welcher } \mathbb{Q} \text{ und } \sqrt{2} \text{ enthält}}$$

⚠ beliebige Quotienten sind nicht zwingend Körper
$\rightsquigarrow$ braucht irreduzible Polynome

Zwingen nun der Tensoralgebra $T(V)$ etwas auf:

Def. 6.6.18:
Sei V ein K-Vektorraum. Dann nennt man den Quotienten

„mache $T(V)$ kommutativ“

$$S(V) = T(V)/(\{v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V\})$$

$$= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left(V^{\otimes n} / \langle \{ v_1 \otimes \ldots \otimes v_n - v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)} \mid \sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \text{ bijektiv}, v_1,\ldots,v_n \in V \} \rangle\right)}_{S^n(V)}$$

der Tensoralgebra $T(V)$ die symmetrische Algebra über V.

Elemente von $S(V)$ sind quasi "Polynome in V", vgl. Bsp. 8.6.20. Zunächst:

Satz 8.6.19:
Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $v_j, j \in J$.

(a) Die symmetrische Algebra $S(V)$ ist kommutativ, d.h. es gilt $a \cdot a' = a' \cdot a$ für alle $a, a' \in S(V)$.

(b) Die endlichen Produkte $v_{j_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot v_{j_r}^{m_r}$, $r \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_r \in J$, $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ mit $v_{j_i} \neq v_{j_h}$ für alle $1 \leq i, h \leq r$ bilden eine Basis von $S(V)$.

Bew.:
„(a)": Sei $a_h, h \in \tilde{J}$ eine Basis von $S(V)$. Dann reicht es, die Behauptung für zwei dieser Basisvektoren zu überprüfen. Dies ist per Definition der symmetrischen Algebra der Fall.

„(b)": Nach Teil (a) sind solche Produkte wohldefiniert. Da diese Produkte offenbar im Bild der Basis $v_{h_1} \cdot \ldots \cdot v_{h_s}$, $s \in \mathbb{N}$, $h_1, \ldots, h_s \in J$ von $T(V)$ liegen, erzeugen sie bereits $S(V)$. Definiere für jedes $m = (m_j)_{j \in J} \in \mathbb{N}^J$ mit $m_j = 0$ für alle bis auf endlich viele $j \in J$ eine lineare Abbildung $f_m : T(V) \to K$, welche einen Basisvektor $v_{h_1} \cdot \ldots \cdot v_{h_s}$ auf 1 abbildet, falls v_{h_i} genau m_{h_i} mal in $v_{h_1} \cdot \ldots \cdot v_{h_s}$ auftritt für alle $1 \leq i \leq s$ und sonst auf 0 abbildet. Dann erhalten wir

$$I = (\{v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V\}) \subset \ker(f_m),$$

da ein beliebiges Element von I von der Form

$$\sum_{i=1}^{t} a_i (v_i \otimes v_i' - v_i' \otimes v_i) a_i'$$

für $a_i, a_i' \in T(V)$ ist. Somit induziert f_m eine lin. Abb. $\tilde{f}_m : S(V) \to K$. Nach der universellen Eigenschaft des Produktes erhalten wir also eine lineare Abbildung $f : S(V) \to K^{\mathbb{N}^J}$, welche endliche Produkte der obigen Form $v_{j_1}^{m_1} \cdot \ldots \cdot v_{j_r}^{m_r}$ auf linear unabhängige Elemente abbildet. Somit müssen diese Produkte selbst bereits linear unabhängig sein. $\square$

Bsp. 8.6.20:

Die symmetrische Algebra $S(K^n)$ ist isomorph zum Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$:
Wähle die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ und bilde die Basiselemente $e_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot e_n^{m_n}$ auf $x_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{m_n}$ ab.
Allgemeiner kann man so zeigen, dass wenn V ein K-Vektorraum mit Basis v_j, $j \in J$ ist, die symmetrische Algebra $S(V)$ isomorph zum Polynomring $K[x_j]_{j \in J}$ ist.

Bem. 8.6.21:

So wie Elemente in $(V^{\otimes n})^* = \operatorname{Hom}(V^{\otimes n}, K)$ den multilinearen Abbildungen $\underbrace{V \times \ldots \times V}_{n \text{ mal}} \to K$ entsprechen, entsprechen Elemente in $S^n(V)^* = \operatorname{Hom}(S^n(V), K)$ den symmetrischen multilinearen

Abbildungen, also den multilinearen Abbildungen, welche invariant unter Änderung der Reihenfolge der Einträge eines n-Tupels $(v_1, \ldots, v_n) \in V \times \ldots \times V$ sind. Insbesondere entsprechen Elemente in $S^2(V)^*$ den symmetrischen Bilinearformen.

Als Abschluss dieses Kapitels noch die universelle Eigenschaft der symmetrischen Algebra:

Satz 8.6.22 (univ. Eig. von $S(V)$):
Ist V ein Vektorraum und A eine komm. K-Algebra, so lässt sich jede lineare Abbildung $f: V \to A$ eindeutig zu einem Homomorphismus $\tilde{f}: S(V) \to A$ von K-Algebren fortsetzen.

Bew.:

Zusammengefasst: $S(V) \cong K[x_i]_{i\in I}$ und das wissen wir das schon

Lineare Abbildungen $f: V \to A$ entsprechen Abbildungen $\{v_i \mid i \in I\} \xrightarrow{f'} A$, wobei $v_i, i \in I$ eine Basis von V ist. Vermöge des Isomorphismuses $S(V) \to K[x_i]_{i\in I}$, müssen wir jedoch nur eine eindeutige Fortsetzung der Abbildung $\{x_i \mid i \in I\} \to A$, $x_i \mapsto f'(v_i)$ nach $K[x_i]_{i\in I} \to A$ definieren. Dies klappt mit der Verallgemeinerung von Satz 8.6.10 für Polynomringe in I-vielen Unbestimmten.

$\square$