§ 8.7 Die äußere Algebra

$v_i \in V$ In TV: $v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n$

$$TV \supseteq V$$

In der äußeren Algebra möchte:

„$\underbrace{v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge v_2 \wedge v_4 \wedge v_5}_{\text{doppelt}} = 0$“

Def 8.7.1: Sei V ein K-VR.

sei U_ℓ der UVR von $V^{\otimes \ell}$, der erzeugt wird von

$v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_\ell$ mit $v_i \in V$, wobei $i \neq j$ existieren mit $v_i = v_j$.

(a) $\underline{\Lambda^\ell V} := V^{\otimes \ell}/U_\ell$ nennt man die <u>ℓ-te äußere Potenz von V</u>.

(b) Sei $U := \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} U_\ell \subseteq \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} V^{\otimes \ell} = TV$

$\Lambda V = \Lambda^0 V \oplus \Lambda^1 V \oplus \Lambda^2 V \oplus \dots$

$\underline{\Lambda V} := TV/U = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{N}} \Lambda^\ell V$ nennt man die <u>äußere Algebra von V</u>.

Die Multiplikation in ΛV wird $a \wedge b$ geschrieben (für $a, b \in \Lambda V$).

Bem 8.7.2: Habe $U_1 \subseteq V^{\otimes 1} = V$, $U_1 = \{0\}$, also $\Lambda^1 V = V^{\otimes 1}/U_1 = V^{\otimes 1} = V$. Kann also V als UVR von ΛV auffassen.

Bsp: $v_1, v_2 \in V \rightsquigarrow v_1 \wedge v_2 \in \Lambda^2 V \subset \Lambda V$

Lemma 8.7.3: Für $v_1, \dots, v_n \in V$ und $1 \leq i < j \leq n$ gilt:

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n =$$
$$-(\underbrace{v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1}}_{=: a} \wedge v_j \wedge \underbrace{v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_{j-1}}_{=: b} \wedge v_i \wedge \underbrace{v_{j+1} \wedge \dots \wedge v_n}_{=: c})$$

Bew: $a \wedge (v_i + v_j) \wedge b \wedge (v_i + v_j) \wedge c = 0$ (da $v_i + v_j$ doppelt vorkommt)

$$\| $$

$$a \wedge v_i \wedge b \wedge (v_i + v_j) \wedge c + a \wedge v_j \wedge b \wedge (v_i + v_j) \wedge c$$

$$\|$$

$$\underbrace{a \wedge v_i \wedge b \wedge v_i \wedge c}_{= 0} + \underbrace{a \wedge v_i \wedge b \wedge v_j \wedge c}_{v_1 \wedge \dots \wedge v_n} + a \wedge v_j \wedge b \wedge v_i \wedge c + \underbrace{a \wedge v_j \wedge b \wedge v_j \wedge c}_{= 0}$$

Also: $a \wedge v_j \wedge b \wedge v_i \wedge c = - v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ □

Def 8.7.4: Eine multilineare Abb. $f: \underbrace{V \times \dots \times V}_{\ell} \to W$ heißt

alternierend, wenn gilt: Sind $v_1, \dots, v_\ell \in V$ mit $v_i = v_j$ für gewisse $i \neq j$, so ist $f(v_1, \dots, v_\ell) = 0$

Satz 8.7.5: (i) Die Abb. $\underbrace{V \times \dots \times V}_{\ell} \to \Lambda^\ell V$, $(v_1, \dots, v_\ell) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell$ ist multilinear und alternierend. (ii) Ist W ein weiterer K-VR so habe eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^\ell V, W) \xrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{multilin. alt. Abb.} \\ \underbrace{V \times \dots \times V}_{\ell} \to W \end{array} \right\}$$

$$f \longmapsto \big((v_1, \dots, v_\ell) \mapsto f(v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell) \big)$$

Bew: (i) klar nach def.

(ii) Habe $\mathrm{Hom}(V^{\otimes \ell}, W) \xrightarrow{1:1} \{\text{multilin. Abb. } V \times \dots \times V \to W\}$

$$f \longmapsto \big((v_1, \dots, v_\ell) \mapsto f(v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell) \big)$$

$$\cup| \qquad\qquad\qquad\qquad \cup|$$

$$\{ f \in \mathrm{Hom}(V^{\otimes \ell}, W) \mid \underbrace{U_\ell \subseteq \ker f}\} \xrightarrow{1:1} \{\text{multilin. alternierende Abb}\}$$

nach 8.5.1 → $\|$

$\mathrm{Hom}(\Lambda^\ell V, W)$, $\Lambda^\ell V = V^{\otimes \ell} / U_\ell$

$\iff$ Erzeugen von U_ℓ liegen in $\ker f$

$\iff$ $f(v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell) = 0$ falls ein v_i mehrfach vorkommt

□

Erinnerung an 5.1.1: Ex. genau eine multilin. alt. Abb. $f: \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{n} \to K$ (*)
mit $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$
Es gilt: $f(v_1, \ldots v_n) = \det\left(\left(v_1 \middle| \cdots \middle| v_n\right)\right)$.

Satz 8.7.6: (a) Sei $\dim V = n$. Dann ist $\dim(\Lambda^n V) = 1$

(b) Ist $A = \left(v_1 \middle| \cdots \middle| v_n\right) \in K^{n \times n}$,

so ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det A \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)$

Anmerkung: Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so ist $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} \in \Lambda^n V$ nur dann $\neq 0$, wenn alle i_j verschieden sind. All diese $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}$ unterscheiden sich nach 8.7.3 nur durch das Vorzeichen.

Bew: (a) O.E.: $V = K^n$

Wende 8.7.5 auf 5.1.1 an. Erhalte:

Ex. genau ein $\alpha \in \underbrace{\mathrm{Hom}(\Lambda^n K^n, K)}_{(\Lambda^n K^n)^*}$ mit

$\alpha(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1$

- $\Rightarrow e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \neq 0$
- Dass ein Homomorphismus von $\Lambda^n K^n$ woanders hin dadurch festgelegt ist, was er mit $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ macht bedeutet, dass $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ eine Basis von $\Lambda^n K^n$ ist. Bem: α ist die duale Basis dazu.
- Also $\dim \Lambda^n K^n = 1$.

(b) Habe: $\alpha(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) \overset{(*)}{=} f(v_1, \ldots, v_n) = \det\left(\left(v_1 \middle| \cdots \middle| v_n\right)\right) = \det A$

Da α die duale Basis zu $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ ist, gilt für beliebige $w \in \Lambda^n K^n$:

$$w = \alpha(w) \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) \quad \text{(nach 8.2.10)}$$

Also: $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \underbrace{\alpha(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)}_{= \det A} \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)$

□

Satz 8.7.7: Sind V, W K-VR, so lässt sich jedes $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ eindeutig fortsetzen zu einem Algebra-Homomorphismus $\tilde{f}: \Lambda V \to \Lambda W$, der $\Lambda^l V$ auf $\Lambda^l W$ abbildet.

Def 8.7.8: Dieses $\tilde{f}$ wird mit Λf bezeichnet. Die Einschränkung davon auf $\Lambda^l V \to V^l W$ wird $\Lambda^l f$ bezeichnet.

Bew.: • Gegeben: $f: V \to W$

• Nach 8.6.12 setzt sich f eindeutig fort zu einem Alg-Homo $\tilde f: TV \to TW$. $\tilde f$ bildet $V^{\otimes \ell}$ auf $W^{\otimes \ell}$ ab.

• Wenn $\tilde f$ existiert, ist es eindeutig:

$\Lambda^\ell V$ wird erzeugt von $v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell$, $v_i \in V$

(*)
$$\tilde f(v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell) \overset{\text{da } \tilde f \text{ Alg-Homo}}{=} \tilde f(v_1) \wedge \dots \wedge \tilde f(v_\ell) \overset{\text{da } \tilde f\ f \text{ fortsetzt}}{=} f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_\ell)$$

$$\begin{tikzcd}
V^{\otimes \ell} \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d, "\mathrm{kan}_V"] & W^{\otimes \ell} \arrow[d, "\mathrm{kan}_W"] \\
V^{\otimes \ell}/U_\ell \arrow[r, "\text{hätte gerne}"'] & W^{\otimes \ell}/U'_\ell
\end{tikzcd}$$

$v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell \mapsto f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_\ell)$

$v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell \mapsto f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_\ell)$

$V^{\otimes \ell}/U_\ell = \Lambda^\ell V$, $\quad W^{\otimes \ell}/U'_\ell = \Lambda^\ell W$

U_ℓ ist erzeugt von $v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell$, $v_i \in V$, mind. ein v_i kommt mehrfach vor.

U'_ℓ ist erzeugt von $w_1 \otimes \dots \otimes w_\ell$, $w_i \in W$, mind. ein w_i kommt mehrfach vor.

• Existenz von $\tilde f$: (*) sagt: Das obige Diagramm kommutiert.

Nach 8.5.1 habe: $\mathrm{Hom}(V^{\otimes \ell}/U_\ell, W^{\otimes \ell}/U'_\ell)$ entsprechen den Homomorphismen von $V^{\otimes \ell}$ nach $W^{\otimes \ell}/U'_\ell$, die U_ℓ im Kern haben.

Anders ausgedrückt: Habe $h: V^{\otimes \ell} \to W^{\otimes \ell}/U'_\ell$, $h = \mathrm{kan}_W \circ \tilde f$

Damit sich h als Verknüpfung $\tilde f \circ \mathrm{kan}_V$ schreiben lässt, brauche: $U_\ell \subseteq \ker h$

• Zeige, dass die Erzeuger von U_ℓ in $\ker h$ liegen.

Betrachte also $v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell$ mit $v_i = v_j$ für gewisse $i \neq j$

$h(v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell) = \mathrm{kan}_W(f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_\ell))$

Da $f(v_i) = f(v_j)$ ist $f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_\ell) \in U'_\ell$,

also $\mathrm{kan}_W(f(v_1) \otimes \dots \otimes f(v_\ell)) = 0$. Also $v_1 \otimes \dots \otimes v_\ell \in \ker h$.

$\square$

Satz 8.7.9: Ist V ein n-dim. K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist $\Lambda^n f \in \mathrm{End}(\underbrace{\Lambda^n V}_{\substack{1\text{-dim nach} \\ 8.7.6(a)}})$ das $\det(f)$-fache der Identitätsabbildung.

Bew: O.E. $V = K^n$. Sei f gegeben durch die Matrix $A = (v_1 | \dots | v_n)$, $v_i \in K^n$

$$\text{zu zeigen: } (\Lambda^n f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \overset{?}{=} \underbrace{\det(f)}_{=\det(A)} \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

$$(\Lambda^n f)(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n) = v_1 \wedge \dots \wedge v_n \overset{8.7.6(b)}{=} \det(v_1 | \dots | v_n) \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \qquad \square$$

Satz 8.7.10 (Cramersche Regel, vgl. 5.1.13(b)): Ist $A \in K^{n \times n}$ invertierbar und $b \in K^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ die eindeutige Lösung von $Ax = b$, so gilt:

$$x_\ell = \frac{\det A_\ell}{\det A} \qquad \text{für } A_\ell = (v_1 | \dots | v_{\ell-1} | b | v_{\ell+1} | \dots | v_n).$$

Bew: O.E. $\ell = 1$

$$x \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \overset{8.7.6(b)}{=} \underbrace{\det(x | e_2 | \dots | e_n)}_{\det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \\ & \vdots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot 1 \cdots 1} \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

$$= x_1 \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

$$\Lambda^n A (x \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \det A \cdot (x \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n)$$

$$\Lambda^n A (x \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = Ax \wedge Ae_2 \wedge \dots \wedge Ae_n$$

$$\det A \cdot (x \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n) = \det A \cdot x_1 \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

da x Lsg von $Ax = b$

$$Ax \wedge Ae_2 \wedge \dots \wedge Ae_n = b \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n \overset{8.7.6(b)}{=} \det \underbrace{(b | v_2 | \dots | v_n)}_{A_1} \cdot (e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$$

Also: $\det A_1 = \det A \cdot x_1$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$$ $\square$

<u>Satz 8.7.11</u>: Sei V ein K-VR mit Basis $v_1, \dots, v_n$. Für $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n$ und $I = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ setze $v_I := v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_\ell} \in \Lambda^\ell V$

(a) $(v_I)_{I \subseteq \{1,\dots,n\}}$ ist eine Basis von ΛV. Insbes ist $\dim \Lambda V = 2^n$

(b) Für jedes ℓ habe:

$(v_I)_{I \subseteq \{1,\dots,n\}, \#I = \ell}$ ist eine Basis von $\Lambda^\ell V$.

Insbes ist $\dim \Lambda^\ell V = \binom{n}{\ell}$

<u>Bsp</u>: $V = \mathbb{R}^4$.

Basis von $\Lambda^0 V = K$: 1 („leeres $\wedge$-Produkt") $\dim = 1$

Basis von $\Lambda^1 V = V$: e_1, e_2, e_3, e_4 $\dim = 4$

Basis von $\Lambda^2 V$: $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4$ $\dim = 6$

Basis von $\Lambda^3 V$: $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ $\dim = 4$

Basis von $\Lambda^4 V$; $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ $\dim = 1$

Basis von $\Lambda^5 V$: $\emptyset$ $\dim = 0$

ΛV $\dim = 16$

<u>Bew</u>: • Zeige (b): $(v_I)_{I \subseteq \{1,\dots,n\}, \#I = \ell}$ ist eine Basis von $\Lambda^\ell V$.
(Dann folgt auch (a))

• <u>Diese v_I erzeugen $\Lambda^\ell V$</u>:

• Nach 8.6.7 wird $V^{\otimes \ell}$ erzeugt von $v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_\ell}$ für beliebige $i_1, \dots, i_\ell$.

Also erzeugen diese $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_\ell}$ auch $\Lambda^\ell V$.

• Ist $i_k = i_{k'}$ für $k \neq k'$, so ist $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_\ell} = 0$, d.h. reicht, solche Tupel $i_1, \dots, i_\ell$ zu nehmen, wo alle i_k verschieden sind.

• Ist $\{i_1, \dots, i_\ell\} = \{i_1', \dots, i_\ell'\} =: I$, $i_1' < \dots < i_\ell'$, so ist

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_\ell} = \pm \underbrace{v_{i_1'} \wedge \dots \wedge v_{i_\ell'}}_{= v_I} \quad \text{(nach 8.7.3)}$$

Also erzeugen die v_I schon $\Lambda^\ell V$.

- <u>Die v_I sind lin. unabh.:</u>

  ($I, I' \subseteq \{1,\dots,n\}$ ℓ-elementig)

  - Wir werden zeigen:

    also: $\beta_I \in (\Lambda^\ell V)^*$

    (Δ) Es existieren lineare Abb. $\beta_I : \Lambda^\ell V \to K$ mit:

    (*) $\qquad \beta_I(v_I) = 1$ und $\beta_I(v_{I'}) = 0$ falls $I' \neq I$

  - Aus (Δ) folgt, dass die v_I l.u. sind:

    Betrachte $f : \Lambda^\ell V \to K^{\binom{n}{\ell}}$, $w \mapsto (\beta_I(w))_I$

    f bildet $(v_I)_I$ auf die Std-Basis von $K^{\binom{n}{\ell}}$ ab.

    Insbes sind die $f(v_I)$ lin. unabh. $\Rightarrow$ Die v_I sind lin. unabh.

  - Bleibt, (Δ) zu zeigen.
    - Sei also I gegeben. o.E. $I = \{1,\dots,\ell\}$.
    - Sei $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in V^*$ die duale Basis zu $v_1,\dots,v_n$
    - Betrachte

$$g_I : \underbrace{V \times \dots \times V}_{\ell} \to K,\ (v_1',\dots,v_\ell') \mapsto \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1') & \cdots & \alpha_1(v_\ell') \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_\ell(v_1') & \cdots & \alpha_\ell(v_\ell') \end{pmatrix}$$

Für allgemeine I würde bei den α die Indizes nehmen, die in I liegen.

- g_I ist multilinear und alternierend, da $(w_1,\dots,w_\ell) \mapsto \det(w_1|\dots|w_\ell)$ multilinear und alternierend ist.
- Nach 8.7.5 erhalte eine lin. Abb. $\beta_I : \Lambda^\ell V \to K$ mit $\beta_I(v_1' \wedge \dots \wedge v_\ell') = g_I(v_1',\dots,v_\ell')$.
- <u>Prüfe</u> (*): • <u>$\beta_I(v_I) = 1$.</u> $\qquad (I = \{1,\dots,\ell\})$

$$\beta_I(v_1 \wedge \dots \wedge v_\ell) = g_I(v_1,\dots,v_\ell) = \det\begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_\ell) \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_\ell(v_1) & \cdots & \alpha_\ell(v_\ell) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

da α_i duale Basis zu v_i

- $\beta_I(v_{I'}) = 0$ falls $I' \neq I$. $\{1, \dots, l\}$

$$\beta_I(v_{I'}) = \beta_I(\underbrace{\dots\dots \wedge v_k}) = g_I(\dots, v_k)$$

$k > l$

$$= \det \begin{pmatrix} \dots\dots & \alpha_1(v_k) \\ & \vdots \\ \dots\dots & \alpha_l(v_k) \end{pmatrix}$$

Indizes an den v sind die aus der Menge I'.

$\alpha_1(v_k) = 0, \dots, \alpha_l(v_k) = 0$ da α_i duale Basis zu v_i und $k > l$

$= 0$. $\square$

Satz 8.7.12: Sei V ein endl-dim K-VR und $v_1, \dots, v_l \in V$. Dann gilt:

(a) $v_1, \dots, v_l$ sind lin. unabh. gdw $v_1 \wedge \dots \wedge v_l \neq 0$

(b) Seien nun $v_1, \dots, v_l$ l. unabh. und seien $v_1', \dots, v_l' \in V$ auch lin. unabh.

$\langle v_1, \dots, v_l \rangle_K = \langle v_1', \dots, v_l' \rangle_K$ gdw $v_1 \wedge \dots \wedge v_l$ und $v_1' \wedge \dots \wedge v_l'$ unterscheiden sich nur um einen Faktor aus $K^\times$.

l-dim UVR von V

Bew. (a) „$\Leftarrow$": Ann: $v_1, \dots, v_l$ sind lin. abh.
O.E. $v_1 = \sum_{i=2}^{l} r_i v_i$ für $r_i \in K$. Dann:

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_l = \left(\sum_{i=2}^{l} r_i v_i\right) \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_l$$

$$= \sum_{i=2}^{l} r_i \underbrace{(v_i \wedge v_2 \wedge v_3 \wedge \dots \wedge v_l)}_{=0,\text{ da } v_i \text{ doppelt vorkommt}} = 0$$

„$\Rightarrow$": Seien $v_1, \ldots, v_\ell$ lin. unabh.

- Ergänze durch $v_{\ell+1}, \ldots, v_n$ zu einer Basis von V.
- 8.7.11 auf diese Basis angewandt liefert (für $I = \{1, \ldots, \ell\}$): $v_I = v_1 \wedge \ldots \wedge v_\ell$ ist einer der Basisvektoren von $\Lambda^\ell V$, also insbes. $\neq 0$

(b) „$\Rightarrow$": Sei also $\langle v_1, \ldots, v_\ell \rangle_K = \langle v_1', \ldots, v_\ell' \rangle_K =: U \subseteq V$

- Die Inklusionsabb. $\mathrm{ink}: U \longrightarrow V$ induziert eine Abb. $\Lambda^\ell \mathrm{ink}: \Lambda^\ell U \longrightarrow \Lambda^\ell V$.

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_\ell \longmapsto \mathrm{ink}(u_1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{ink}(u_\ell) = u_1 \wedge \ldots \wedge u_\ell$$

- $\dim \Lambda^\ell U = 1$
- $v_1 \wedge \ldots \wedge v_\ell,\ v_1' \wedge \ldots \wedge v_\ell' \in \Lambda^\ell U$ (da $v_i, v_i' \in U$)

  Zwei Vektoren in einem eindim VR sind Vielfache voneinander.

„$\Leftarrow$" Sei nun $\langle v_1, \ldots, v_\ell \rangle_K =: U \neq \langle v_1', \ldots, v_\ell' \rangle_K =: U'$

Wähle eine Basis $v_1'', \ldots, v_n''$ von V s.d.:

- $v_1'', \ldots, v_m''$ ist eine Basis von $U \cap U'$ ($m := \dim U \cap U'$)
- $v_1'', \ldots, v_\ell''$ ist eine Basis von U

  Nach „$\Rightarrow$" habe: $v_1 \wedge \ldots \wedge v_\ell = r \cdot (v_1'' \wedge \ldots \wedge v_\ell'')$ ($r \in K^\times$)
- $v_1'', \ldots, v_m'', v_{\ell+1}'', \ldots, v_{2\ell-m}''$ eine Basis von U'

  Nach „$\Rightarrow$" habe: $v_1' \wedge \ldots \wedge v_\ell' = r' \cdot (v_1'' \wedge \ldots \wedge v_m'' \wedge v_{\ell+1}'' \wedge \ldots \wedge v_{2\ell-m}'')$ ($r' \in K^\times$)

- Wende 8.7.11 an auf $v_1'', \ldots, v_n''$, um eine Basis von $\Lambda^\ell V$ zu erhalten. In dieser Basis habe $v_1'' \wedge \ldots \wedge v_\ell''$ und $v_1'' \wedge \ldots \wedge v_m'' \wedge v_{\ell+1}'' \wedge \ldots \wedge v_{2\ell-m}''$ als Basisvektoren. Also sind diese Vektoren nicht Vielfache voneinander.

  Also sind auch $v_1 \wedge \ldots \wedge v_\ell$ und $v_1' \wedge \ldots \wedge v_\ell'$ nicht Vielfache voneinander. $\square$