Überblick / Zusammenfassung

Kap 6

Setting: Habe euklidischen bzw. unitären VR. Habe außerdem β

Möchte β verstehen.

Grundbegriffe: Orthogonalität, orthogonale / unitäre Endomorphismen.

nach Wahl einer (orthonormal-) Basis

$$\left\{ \begin{array}{l}\text{Bilinearform}\\ \text{Sesquilinearform}\end{array} \ \beta \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Endomorphismen } f\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Matrizen } A\}$$

$$\beta(v,w) = \langle v, f(w)\rangle = v^T \overline{Aw}$$

$$\begin{array}{l}\text{symmetrisch}\\ \text{hermitesch}\end{array} \iff \text{selbstadjungiert} \iff \begin{array}{l}\text{symmetrisch}\\ \text{hermitesch}\end{array} \iff \bar{A} = A^T$$

$$\text{selbstadjungiert} \iff f = f^* \iff \langle v, f(w)\rangle = \langle f(v), w\rangle$$

Spektralsatz:

$$\begin{array}{l}\text{ex. ONB mit}\\ \beta(v_i,v_j)=0 \text{ für } i\neq j\end{array} \iff \text{ex. ONB aus EV etc}$$

$$\text{positiv definit} \iff A \text{ positiv definit} \iff \text{Alle EW positiv}$$

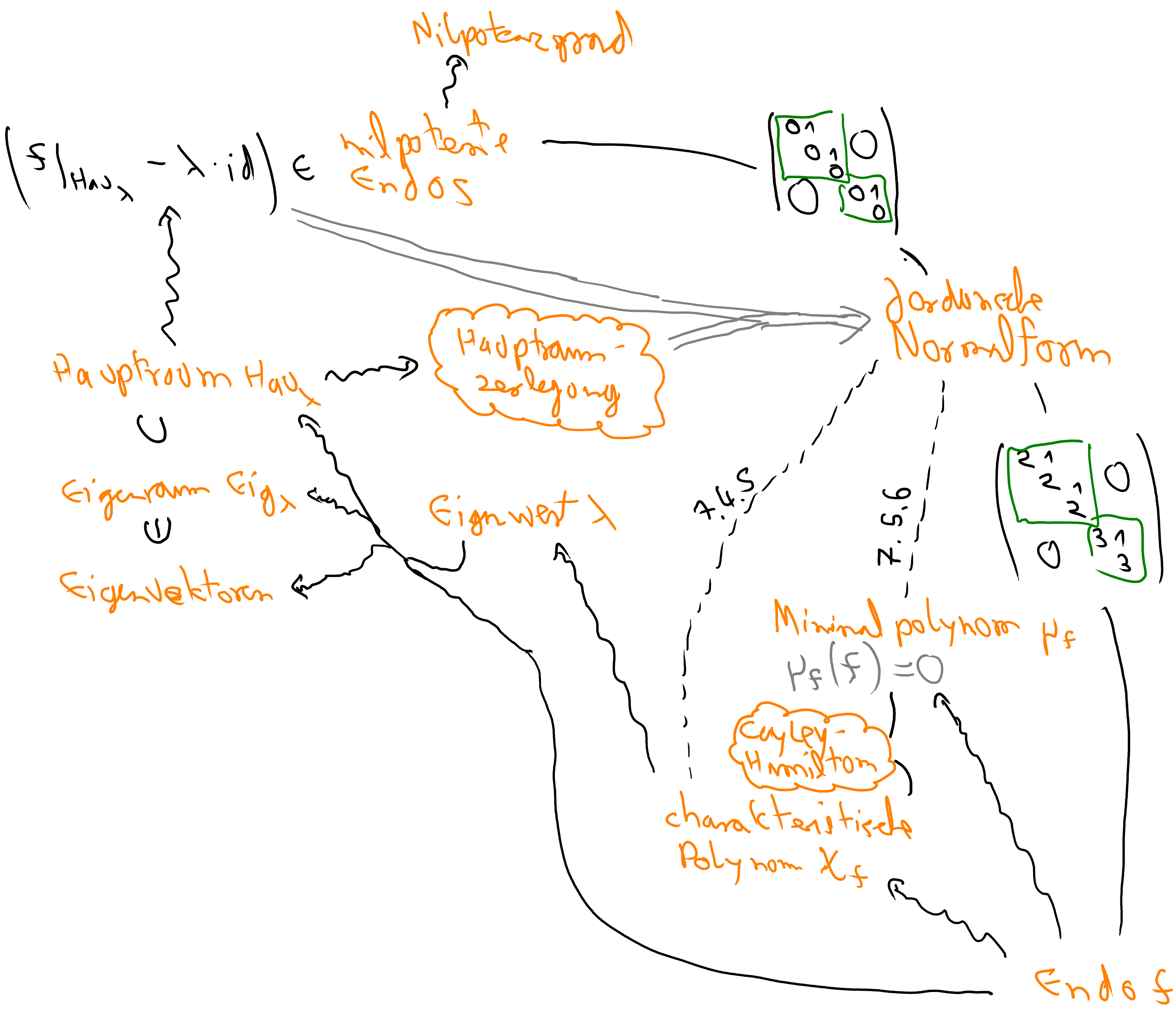
Satz: Trägheitssatz: Durch geeignete Basis-Wahl eines $\mathbb{R}$-VR wird β (symm. Bilinearform) besonders einfach.

Arten / Eigenschaften von quadratischen Matrizen / Endomorphismen

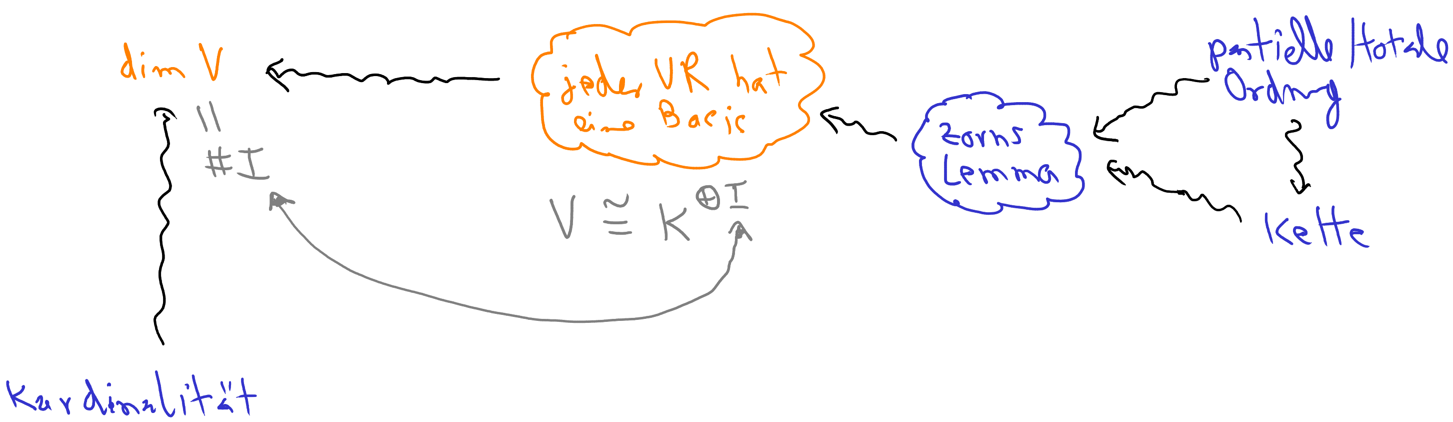
Matrizen	Endomorphismen	Bem
$K^{n\times n}$	$End(V)$	Algebra
$GL_n(K)$ (invertierbar)	$GL(V) = Aut(V)$ Automorphismen	Gruppe
$O(n) = O_n(\mathbb{R})$ orthogonal = erhaltend Skalarprod	orthogonale Transformationen	für euklidische VR Gruppe
$U(n)$ unitär = erhaltend Skalarprod	unitäre Transformation	für unitäre VR Gruppe
symmetrisch	selbstadjungiert	für euklidische VR
hermitesch	selbstadjungiert	für unitäre VR
nilpotent	nilpotent	
Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$	~~X~~	hängt von Basiswahl ab
diagonalisierbar	diagonalisierbar	
JNF	~~X~~	hängt von Basiswahl ab
Begleitmatrix	~~X~~	hängt von Basiswahl ab

Jordansche Normalform

Voraussetzung: K alg. abgeschlossen, z.B. $K = \mathbb{C}$



Unendlich-dimensionales



Vektorraumkonstruktionen

Im Folgenden: $v\in V$, $v_1,\dots,v_n$ Basis von V, $v_{i_1},\dots,v_{i_{n_i}}$ Basis von V_i

Aus Basen der Ursprungs-VR erhalte Basis der Konstruierten VR

Neuer VR	Typisches Element	Basis-Vektoren	dim	
$V\oplus V'$	(v,v')	v_j, v'_j	$\dim V+\dim V'$	$\mathrm{Hom}(V\oplus V',W)$ $=\mathrm{Hom}(V,W)\times\mathrm{Hom}(V',W)$ $\mathrm{Hom}(W,V\oplus V')$ $=\mathrm{Hom}(W,V)\times\mathrm{Hom}(W,V')$
$\bigoplus_{i\in I} V_i$	Falls $I=\mathbb{N}$: $(v_0,v_1,v_2,0,0,\dots)$	v_{i_j}	$\sum_{i\in I}\dim V_i$	$\mathrm{Hom}(\bigoplus V_i,W)$ $=\prod\mathrm{Hom}(V_i,W)$
$\prod_{i\in I} V_i$	Falls $I=\mathbb{N}$: $(v_0,v_1,v_2,v_3,\dots)$	?	sehr groß	$\mathrm{Hom}(W,\prod V_i)$ $=\prod\mathrm{Hom}(W,V_i)$
V^*		α_i (duale Basis)	$\dim V$ falls V endl.-dim	
V_L (Skalarenw.; $L\supseteq K$)	endliche Summen von $r\cdot v$ für $r\in L$	v_i (L-Basis)	$\dim_L V_L=\dim_K V$	W L-VR: $\mathrm{Hom}_L(V_L,W)$ $=\mathrm{Hom}_K(V,W)$
$V\otimes V'$	endliche Summen von $v\otimes v'$	$v_i\otimes v'_j$	$\dim V\cdot\dim V'$	$\mathrm{Hom}(V\otimes V',W)$ $=\mathrm{Bil}(V\times V',W)$
V/U	$\mathrm{kan}(v)=v+U$	Falls $v_1,\dots,v_m$ Basis von U: $\mathrm{kan}(v_{m+1}),\dots,\mathrm{kan}(v)$ Basis von V/U	$\dim V-\dim U$	$\mathrm{Hom}(V/U,W)$ $=\{\mathrm{Hom}(V,W)$ mit U im Kern$\}$
TV	endl. Summen von $v\otimes v'\otimes\dots\otimes v'''$	$v_{i_1}\otimes\dots\otimes v_{i_l}$	∞ falls $V\neq\{0\}$	$\mathrm{Hom}_{Alg}(TV,A)$ $=\mathrm{Hom}_{VR}(V,A)$
SV	endl. Summen von $v\cdot v'\cdot\dots\cdot v'''$ (Reihenfolge egal)	$v_1^{r_1}\cdot\dots\cdot v_n^{r_n}$	∞ falls $V\neq\{0\}$	$\mathrm{Hom}_{Alg}(SV,A)$ $=\mathrm{Hom}_{VR}(V,A)$ für A kommutativ
ΛV	$v\wedge v'\wedge\dots\wedge v'''$ (=0 falls ein v doppelt vorkommt)	$v_{i_1}\wedge\dots\wedge v_{i_l}$ $i_1<i_2<\dots<i_l$	$2^{\dim V}$	

Weitere „Formeln" (falls V endl.-dim.): $(V^*)^* = V$

$(V \otimes V') \otimes V'' = V \otimes (V' \otimes V'')$ etc.

$(V \otimes V')^* = V^* \otimes (V')^*$

$\mathrm{Hom}(V, V') = V^* \otimes V'$

Beziehung zw. $\Lambda^n V$ und $\det$