vom 12.4:

Frage: Ist

$$\langle v, w\rangle = v^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}}_{A} w$$

ein Skal-Prod?

Frage, die übrig war: Ist A positiv definit?

Nach Satz 6.6.7: Bestimme die EW von A:

$$t_A = \det\begin{pmatrix} 3-x & -i \\ i & 2-x \end{pmatrix} = (3-x)(2-x) - \underbrace{(-\underbrace{i^2}_{=-1})}_{1}$$

$$= x^2 - 5x + 6 - 1 = x^2 - 5x + 5$$

NST davon: $\dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 5}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$

$\Rightarrow A$ positiv definit.

Frage vom 19.4:

$$\beta(v, w) = v^T \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}_{A} w$$

Ist β ein Skalarprod?

EW von A sind $2, 8$. Also: Ja.

Betrachte

$$\beta(v, w) = v^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} w$$

Gesucht: Basis $v_1, \dots, v_4$ von $\mathbb{R}^4$ wie in 6.6.8.

Sei $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \right)$

soll sein

$$\beta'\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \beta\left(S\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, S\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \beta(v_3, v_1) \overset{!}{=} 0$$

$$\beta'\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\beta\left(S\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, S\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\beta(v_3,v_3)\in\{-1,0,1\}$$

$$\beta'(v,w):=\beta(Sv,Sw)$$

$$\beta'(v,w) \overset{!!}{=} v^T B w$$

$$\beta(Sv,Sw) = (Sv)^T A Sw = v^T S^T A S w$$

$$B=\begin{pmatrix}-1,0,1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1,0,1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1,0,1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1,0,1\end{pmatrix}$$

Also: $B = S^T A S$

D.h. B entsteht aus A durch „gleiche Zeilen- und Spalten-Transformationen"

Also:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&2&0&1\\1&0&0&0\\-1&1&0&3\end{pmatrix}\quad \cdot 1$$

addiere 1. Z. zu 4. Z.
addiere 1. Sp. zu 4. Sp.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&2&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}\quad \cdot 1$$

Elementarmatrix

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&2\end{pmatrix}\quad -1$$

$$E_2=\begin{pmatrix}1&&1&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&1\\0&0&-1&1\\0&1&1&2\end{pmatrix}$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&&0&1\\&&1&0\\&&&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot 1$$

$\cdot 1 \quad \leftarrow E_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{2}$$

$\cdot -\frac{1}{2} \quad \leftarrow E_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \end{matrix}$$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} \quad \leftarrow E_6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: B$$

B hat 3x „1" und 1x „-1"

$$B = \underbrace{E_6^T \cdots E_2^T E_1^T}_{S^T} A \underbrace{E_1 E_2 \cdots E_6}_{S} \quad \leftarrow \text{so } S \text{ ausrechnen}$$

Spalten von S bilden eine mögliche gesuchte Basis.

A nilpotent mit Nilpot-Grad $= m$. Also $A^m = 0$

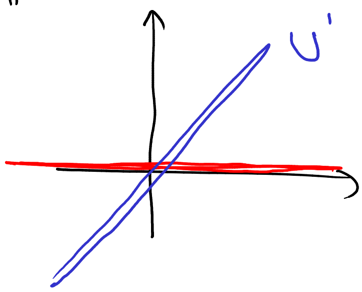
Ex. $v \in K^n$ s.d. $\quad v, Av, A^2v, \dots A^{m-1}v$ alle $\neq 0$.

Aufgabe: Zeige: die $v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v$ sind l.u.

Lsg davon kommt im Beweis von 7.2.4 vor.

Zusammenhang zw. äußerer und innerer direkter Summe:

$V=\mathbb{R}^2$



$U=\mathbb{R}\times\{0\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \mid x\in\mathbb{R}\right\}$

$U'=\left\{\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{R}\right\}$

- Äußere direkte Summe von U und U':

$$U \underset{\text{äußer}}{\oplus} U' = \left\{\left(\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}\right) \mid x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\right\}$$

- Innere direkte Summe:
  - Summe: $U+U' = \left\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix} \mid x,y\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^2$
  - Ist diese Summe direkt? Prüfe: $U\cap U' = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$?

    Ja; also ist $U+U'$ eine direkte Summe.

    Man sagt auch: $\mathbb{R}^2$ ist die innere direkte Summe von U und U'.

- Beziehung dazwischen:

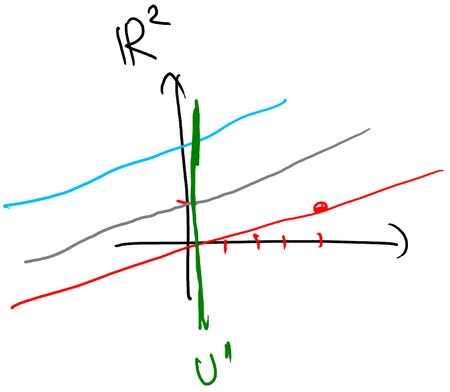
soll heißen: Die Abb ist ein Iso

$$U \underset{\text{äußer}}{\oplus} U' \xrightarrow{\ \sim\ } U+U'$$

$$\left(\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}z_1-z_2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z_2\\z_2\end{pmatrix}\right) \longmapsfrom \begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$$

Bsp zu 7.1.6



$U = \left\{ \begin{pmatrix} 4x \\ x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$

$$V/U = \left\{ U, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + U, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + U, \dots \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + U \,\middle|\, r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U' \xrightarrow{\sim} V/U$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} + U$$

Bsp zu 7.2.2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1 \longmapsto 0$

$e_2 \longmapsto e_1$

$e_3 \longmapsto e_1 + e_2$

$e_4 \longmapsto e_3$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_0 = \operatorname{im} A^0 = \operatorname{im} I_4 = \mathbb{R}^4$$

span

$$W_1 = \operatorname{im} A^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 \times \{0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_4 = 0 \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = W_2 = \operatorname{im} A^2 = \mathbb{R}^2 \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3 = 0,\ x_4 = 0 \right\}$$

$$W_3 = \mathbb{R} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$W_4 = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\longleftarrow$ Also im $A^4 = 0$, also $A^4 = 0$

Insbes.: A nilpot vom Grad 4.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$. Frage: Ist A nilpotent?

Antwort: $A^2 = \begin{pmatrix} 5\cdot 5 - 5\cdot 5 & 5\cdot 5 - 5\cdot 5 \\ -5\cdot 5 + (-5)(-5) & -5\cdot 5 + (-5)(-5) \end{pmatrix} = 0$ Also: Ja.

Nilpot-Grad

$\mathbb{R}^2 = W_0 \underset{\neq}{\supseteq} W_1 \underset{\neq}{\supseteq} W_2 = \{0\}$

$\uparrow$ $\operatorname{im} A = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

$\{0\} = U_0 \underset{\neq}{\subseteq} U_1 \underset{\neq}{\subseteq} U_2 = \mathbb{R}^2$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\;\, \|$

$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; 5x + 5y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Da $A^2 = 0$ muss $W_1 \subseteq U_1$ sein:

$\uparrow$ das sind Vektoren der Form Av.

Da $A^2 v = 0$ muss $Av \in \ker A = U_1$