Bsp: Matrix in JNF

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

„Großblock" mit 3 auf Diag.

Jordanblöcke

„Großblock" mit 5 auf Diag.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein einziger Großblock mit 0 auf Diag

Aufgabe: Berechne die JNF von $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

- χ_A bestimmen:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} 2-x & 4 & -2 \\ 0 & 4-x & -1 \\ 0 & 4 & -x \end{pmatrix} = (2-x)\big((4-x)\cdot(-x)+4\big)$$

$$= (2-x)(x^2-4x+4)$$

- NSt von χ_A: 2 ist NSt; $x^2-4x+4 = (x-2)^2$

... 2 ist einzige NSt.

$(\chi_A = (2-x)^3)$

- Haupträume von f bestimmen:

<u>Methode 1:</u> Nur ein EW (nämlich 2). Also muss $Hau_2(A) = \mathbb{C}^3$ sein.

<u>Methode 2:</u> Diese 3 ist die dim von $Hau_2(A)$, also $Hau_2(A) = \mathbb{C}^3$

- Zwischenstand: JNF kann folgendes sein

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & \\ & \boxed{2} & 0 \\ & & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 0 \\ & & \boxed{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

- Um zu entscheiden, welcher dieser Fälle vorliegt, betrachte $\underbrace{A - 2 \cdot I_3}_{=}$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

- Bestimme dim $\underbrace{\ker B}_{=}$

$$Eig_2(A) = \text{Eigenvektoren von } A \text{ zum EW } 2 \cup \{0\}$$

$$\ker B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

durch probieren gefunden; größer kann ker B nicht sein; sonst wäre er ganz $\mathbb{R}^3$, und dann müsste $B = 0$ sein.

<u>Insbes:</u> $\dim \ker B = 2$, also hat die JNF von B 2 Blöcke; dafür bleibt also nur noch

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Also: ex. $S \in GL_3(\mathbb{C})$, s.d.

$$S^{-1} B S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} A S = S^{-1}(B + 2 \cdot I_3) S = \underbrace{S^{-1} B S}_{= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}} + \underbrace{S^{-1}(2 I_3) \cdot S}_{= 2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} = A'$$

Aufgabe: Finde eine Jordan-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$$A' = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}^{=:A'_{diag}}}_{\text{„Diagonal-Anteil" der JNF}} + \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{=:A'_{nilp.}}}_{\text{„Nicht-Diag-Anteil" der JNF}}$$

diagonalisierbar　　　　nilpotent

$$A = S A' S^{-1} = \underbrace{\overbrace{S \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} S^{-1}}^{=:A_{diag}}}_{\text{diagbar.}} + \underbrace{\overbrace{S \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}}^{=:A_{nilp}}}_{\text{nilpotent}}$$

- Im Allgemeinen müsste man jetzt S bestimmen, um A_{diag} und A_{nilp} berechnen zu können.
- In diesem Fall geht's einfacher: $A_{diag} = S \cdot (2 \cdot I_3) \cdot S^{-1} = 2 \cdot S \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A_{nilp} = A - A_{diag} = \underset{\text{obiges } B}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A_{nilp} \cdot A_{diag} = A_{diag} \cdot A_{nilp}$$

Aufg.: Bestimme die Basis-Wechsel-Matrix S im obigen Bsp.

$$S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \right) \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ 0 & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

„A' beschreibt, was A mit der Basis v_1, v_2, v_3 macht", also:

$B = A - 2I_3$

$Bv_2 = (A - 2 \cdot I_3) v_2 = \underbrace{v_1 + 2v_2}_{} - 2v_2 = v_1$

$$A v_1 = 2 v_1 + 0 v_2 + 0 v_3 \qquad (*1)\ B v_1 = 0$$
$$A v_2 = v_1 + 2 \cdot v_2 \qquad (*2)\ B v_2 = v_1$$
$$A v_3 = 2 v_3 \qquad (*3)\ B v_3 = 0$$

$\left.\begin{matrix} (*1) \\ (*2) \\ (*3) \end{matrix}\right\} (*)$

Gesucht sind also v_1, v_2, v_3, so dass (*) gilt.

- Bestimme Nilpotenzgrad von B:

Mehrere Möglichkeiten:

(1) $\dim \ker B = 2 \Rightarrow rk\, B = 1 \Rightarrow rk\, B^2 < rk\, B$

$\Rightarrow rk\, B^2 = 0$, also $B^2 = 0$

(2) Rechne aus: $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) Nilpot-Grad = größte Blockgröße = 2

- Wähle erstmal $v_1 \in \operatorname{im} B = W_1$

Nilpot-Grad − 1

z.B.: $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\leftarrow$ $Bv_1 = 0$ ist automatisch, da $v_1 \in \operatorname{im} B$ und $B^2 = 0$

(*1) erfüllt

- Wähle Urbild von v_1 unter B:

$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad Bv_2 = v_1$ (*2) erfüllt

- Fehlt noch ein v_3 mit $Bv_3 = 0$ (und l.u. zu v_1, v_2)

Wähle z.B. $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \ker B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$

(oder $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ....)

Also: $S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe: Bestimme die JNF von $C = \left(\quad \right)$

- Berechne χ_C: $\chi_C = \underbrace{(3-x)^5 \cdot (5-x) \cdot (1-x)^2}_{\text{Wir nehmen an, wir hätten das raus-bekommen}}$

Also: $\dim \operatorname{Hau}_3(C) = 5$, $\dim \operatorname{Hau}_5(C) = 1$, $\dim_1(C) = 2$

Also: JNF von C ist
$$\begin{pmatrix} 3 & ? & & & & & & \\ & 3 & ? & & 0 & & & \\ & & 3 & ? & & & 0 & \\ & 0 & & 3 & ? & & & \\ & & & & 3 & & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & 0 & & & & 1 & ? \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wissen insbes.: $\dim \mathrm{Eig}_5(C)=1$

- Berechne $\dim \mathrm{Eig}_1(C) = 2$
- Berechne $\dim \mathrm{Eig}_3(C) = 3$. Also bleibt:

(a)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & ? & & & & & & \\ & 3 & ? & & 0 & & & \\ & & 3 & ? & & & 0 & \\ & 0 & & 3 & ? & & & \\ & & & & 3 & & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & 0 & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Eig}_3(C) = \ker(\underbrace{C - 3\cdot I_8}_{D})$$

- Berechne $\dim \ker D^2 = 4$

Also Fall (b).

(a) Wenn das die JNF ist:
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 = 0$$
$$\Rightarrow \dim \ker D^2 = 5$$

(b) Wenn das die JNF ist:
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \dim \ker D^2 = 4$$

Also JNF von A ist
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & & & & & & \\ & 3 & 1 & & 0 & & & \\ & & 3 & & & & 0 & \\ & 0 & & 3 & & & & \\ & & & & 3 & & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & 0 & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- <u>Bonus:</u>

$\dim \operatorname{im} D^0 = 8$	$\dim \ker D^0 = 0$
$\dim \operatorname{im} D = 5$	$\dim \ker D = 3$
$\dim \operatorname{im} D^2 = 4$	$\dim \ker D^2 = 4$
$\dim \operatorname{im} D^3 = 3$	$\dim \ker D^3 = 5$
$\dim \operatorname{im} D^4 = 3$	$\dim \ker D^4 = 5$

JNF von D:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & -2 & \\ & & & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

7.3.2 für dieses D:

$N=1$ geht nicht, da: Für $N'=2$ ist $\dim \operatorname{im} D^2 \neq \dim \operatorname{im} D$

$N=2$ geht nicht, da: Für $N'=3$ ist $\dim \operatorname{im} D^3 \neq \dim \operatorname{im} D^2$

$N=3$ geht, da für jedes $N' \geq 3$ gilt: $\dim \operatorname{im} D^{N'} = \dim \operatorname{im} D^3$

7.3.2 für $B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{im} B' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ \ker B' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \text{Summe der dim ist 3}$$

$\operatorname{im} B' \cap \ker B'$ enthält $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also ist $\operatorname{im} B' + \ker B'$ keine direkte Summe.

Außerdem ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht in $\operatorname{im} B' + \ker B'$