Aufgabe: Was ist das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =: A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$$

- $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
- $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Die sind lin abh, nämlich $1 \cdot A^3 - A^0 = 0$

  Also gilt: $p(A) = 0$ für $p(x) = x^3 - 1$
- Ist p das Minimalpolynom?
  - A^0, A^1 sind l.u., d.h. ex. kein Polynom p' vom Grad 1 mit $p'(A) = 0$

    Wenn $p'(x) = ax + b$ A annulieren würde, hätte $p'(A) = a \cdot A + b \cdot A^0 = 0$. Also wären A und A^0 lin. abh.
  - $A^2 + A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ... Also $A^2 + A + A^0 = 0$
  - Also gilt $p''(A) = 0$ für $p''(x) = x^2 + x + 1$
- Also: p war nicht das Minimalpolynom; aber: $p'' = \mu_A$

7.5.4 darauf angewendet besagt: Da $p(A) = 0$ muss p ein Vielfaches von μ_A sein, d.h. es gibt ein Polynom q s.d. $p = q \cdot \mu_A$

Also: $x^3 - 1 = q \cdot (x^2 + x + 1)$ Das funktioniert für $q = x - 1$

$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$

Notation von Blatt 6, Aufg. 1 (iii) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \bar{z}$ $(f(z) = \bar{z})$

$\overline{(\ )}$ ist eine Notation für dieses f.

$\bar{\cdot}$ ist eine Notation für dieses f.

Aufgabe: Bestimme $p(A)$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $p(x) = x^3 + 2x - 4$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & & \\ & 3^3 & \\ & & (-1)^3 \end{pmatrix}$$

$$p(A) = \begin{pmatrix} 2^3 & & \\ & 3^3 & \\ & & (-1)^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & & \\ & 2\cdot 3 & \\ & & 2\cdot(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & & \\ & -4 & \\ & & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^3 + 2\cdot 2 - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3^3 + 2\cdot 3 - 4 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^3 + 2\cdot(-1) - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & 29 & \\ & & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p(2) & 0 & 0 \\ 0 & p(3) & 0 \\ 0 & 0 & p(-1) \end{pmatrix}$$

Also: Ist A eine Diag-Matrix, so erhält man $p(A)$, indem man p auf die Diagonaleinträge anwendet.

Mit „Diag-Matrix" ist gemeint: Diagonale von links oben nach rechts unten

---

$A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad p(A) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \; \dots \; \end{pmatrix} \in \underbrace{\mathbb{R}^{4\times 4}}_{= \operatorname{End}(\mathbb{R}^4)}$$

Aufg: Bestimme das Minimalpolynom von
$$A = \begin{pmatrix} 3 & & & & & \\ & 3 & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(3) & & & & & \\ & p(3) & & & 0 & \\ & & p(-1) & & & \\ & & & p(0) & & \\ & 0 & & & p(1) & \\ & & & & & p(2) \end{pmatrix}$$

Gesucht ist also ein $p \in \mathbb{R}[x]$ von minimalem Grad, s.d. $p(A) = 0$ ist,
d.h. $p(3) = 0$, $p(-1) = 0$, $p(0) = 0$, $p(1) = 0$, $p(2) = 0$

- $p(x) = (x-3)(x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$

  Dann gilt: $p(A) = 0$
- p hat minimalen Grad, da ein Polynom mit 5 Nullstellen mindestens Grad 5 haben muss.

Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$. Aufgabe: Bestimme μ_f.

Die Matrix, die zu f gehört ist $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: B$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Probe: } B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot x - 1\cdot y\\ 1\cdot x + 0\cdot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}}$

$B^2 = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ Also: $B^2 + I_2 = 0$

Also: Für $p(x) = x^2+1$ gilt: $p(B) = 0 = p(f)$

Zu 7.5.2 (b): $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2) \ni B = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} \hat{=} f$ $B^4 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} g:\ &\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\| \\ A &= \begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix} \end{aligned} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$$

$p(x) = x^4 + 7x$

$$p(A^{-1}BA) = A^{-1}\underbrace{p(B)}_{\|} A$$

$$(A^{-1}BA)^4 + 7\cdot A^{-1}BA = B^4 + 7B = \begin{pmatrix}1&-7\\7&1\end{pmatrix}$$

hoffentlich.

$f' = g^{-1} \circ f \circ g$

$$\begin{tikzcd} V' = \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^2 = V \arrow[loop below, "f"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \arrow[d, "f'"'] \arrow[r, dotted, no head] & \begin{pmatrix}7\\14\end{pmatrix} = g\left(\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}\right) \arrow[d, "f"] \\ g^{-1}\left(\begin{pmatrix}-14\\7\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}56\\-35\end{pmatrix} \arrow[r, dotted, no head] & \begin{pmatrix}-14\\7\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

?

Anmerkung: $f \in \mathrm{End}(V)$ ist nilpotent $\Longleftrightarrow$ ex. ein Polynom der Form $p(x) = x^r$, das f annuliert.

Bestimme Minimalpolynom von $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5 & 1 \\ & 5 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{3} \end{pmatrix}$

$\underbrace{}_{2\times 2}$ $\underbrace{}_{3\times 3}$ $\underbrace{}_{1\times 1}$

Laut Vorlesung sollte $\mu_A = (x-5)^2 \cdot (x-3)^3$

Prüfe: $\mu_A(A) \overset{?}{=} 0$

$$\mu_A(A)(v) = (A-5I_6)^2(A-3I_6)^3 v$$

Rechne das aus für $e_1, \dots, e_6$

Das sind die Spalten von $\mu_A(A)$

$$(A-5I_6)^2(A-3I_6)^3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & -2 & 1 & & \\ & & & -2 & 1 & \\ & & & & -2 & \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}^2}_{B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}^3}_{C}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $=$

Auf e_1 anwenden:

$C \cdot e_1 = 2e_1 \quad \dots \quad C^3 e_1 = 8 \cdot e_1$

$B \cdot C^3 \cdot e_1 = B \cdot 8 \cdot e_1 = 0$

Auf e_2 anwenden:

$$\overbrace{Ce_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C^2 e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C^3 e_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\in \mathrm{Hau}_5(A)}$$

$BC^3 e_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B^2 C^3 e_2 = 0$

Auf e_3 anwenden:

$Ce_3 = 0$

$\dots \quad C^2 e_4 = 0$

$C^3 e_5 = 0$

$C e_6 = 0$

Zur JNF: Annahme: $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und wir haben schon bestimmt, dass die JNF das Folgende ist:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & & & \\ & 4 & 1 & \\ & & 4 & 1 \\ & & & 4 \end{pmatrix}$$

Wir suchen $\underbrace{S \in GL_4(\mathbb{R})}_{\substack{\text{invertierbare } 4\times 4\text{-Matrix} \\ \text{(Abschnitt 6.7)}}}$ s.d. $S^{-1}AS = B$

Suche dazu $v_1, \dots, v_4 \in \mathbb{R}^4$ s.d. „A mit $v_1, \dots, v_4$ das macht, was B mit $e_1, \dots, e_4$ macht.", also:

$Be_1 = 5e_1$, also will $Av_1 = 5 \cdot v_1$

$Be_2 = 4e_2$, also will $Av_2 = 4v_2$

$Be_3 = 4 \cdot e_3 + e_2$, also will $Av_3 = 4v_3 + v_2$

$Be_4 = 4 \cdot e_4 + e_3$, also will $Av_4 = 4 \cdot v_4 + v_3$

Behauptung: $S = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \right)$ funktioniert.

Prüfe dafür: $S^{-1}AS \overset{?}{=} B$

Prüfe dafür: $S^{-1}ASe_1 \overset{?}{=} Be_1$, $S^{-1}ASe_2 \overset{?}{=} Be_2$, ...

$$S^{-1}A\underbrace{Se_3}_{= v_3} \overset{?}{=} Be_3 = 4 \cdot e_3 + e_2$$

$$S^{-1}\underbrace{A v_3}_{} = S^{-1}(4 \cdot v_3 + v_2) = 4S^{-1}v_3 + S^{-1}v_2 = 4e_3 + e_2$$