Ähnliche Matrizen haben die gleiche JNF:

7.2.4 für Matrizen besagt: zu jeder Matrix $\overset{f}{A}$ ex. Matrix $\overset{g}{S}$ sd. $S^{-1}AS$ in JNF ist. Anders ausgedrückt: Jede Matrix ist zu einer Matrix in JNF ähnlich.

Also: Falls A und B ähnlich, und C ist JNF von A (d.h. C ähnlich zu A) dann ist C ähnlich zu B.

Aufgabe:
Wie viele paarweise nicht-ähnliche 4×4-Matrizen A_i existieren die nilpotent sind und s.d. $\dim \operatorname{im} A_i = 2$?

Lsg: • Versuche überhaupt, so eine Matrix zu finden.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\text{nilpot}}{\underset{\Downarrow}{A^2 = 0}} \qquad \left(A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ wäre nicht nilpot} \right) \quad (A')^2 = A'$$

Besser: Schreibe gleich Matrizen in JNF ← Jordansche Normalform hin:

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \leftarrow \cancel{\dim \operatorname{im} B = 3}$$

~~, also passt nicht zur Aufgabe.~~

$$B_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \qquad B_1' = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$\dim \operatorname{im} B_i = 2$

- B_1 und B_2 erfüllen die Bed. aus der Aufgabe.
- B_1 und B_2 sind nicht ähnlich, da verschiedene Blockgrößen.

B_1, B_1' sind ähnlich

- Mehr nicht-ähnliche Matrizen existieren nicht (die die Bed. aus der Aufgabe erfüllen), da keine weiteren JNF-Matrizen die Bed erfüllen.

Aufgabe: Bestimme die JNF von $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = 0$

$W_1 = \operatorname{im} A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x, y, z \in K \right\}$

$\cup$

$W_2 = \operatorname{im} A^2 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{W_i := \operatorname{im} A^i, \quad U_i := \ker A^i}$

zweite Lösung

4.2.12: $\dim \operatorname{im} A^i = \underbrace{\dim V}_{=5} - \dim \ker A^i$

$\dim W_1 = 3 \Rightarrow \dim U_1 = 2$

$\dim W_2 = 2 \Rightarrow \dim U_2 = 3$

$\dim W_3 = 1 \Rightarrow \dim U_3 = 4$

$\dim W_4 = 0 \Rightarrow \dim U_4 = 5$

Sei B die JNF von A. • $\dim W_1 = 3 \Rightarrow B$ hat 2 Blöcke

Also bleiben folgende Möglichkeiten: $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{smallmatrix}} & \\ & \boxed{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{smallmatrix}} & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix} = B_2$

hier stimmt alles

$B_2^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{smallmatrix}} & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}} \end{pmatrix}$

$\dim \operatorname{im} B_2^2 = 1$, also falsch.

Falls 3 Blöcke:

Bsp: $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix}} & & \\ & \boxed{\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix}} & \\ & & \boxed{0} \end{pmatrix} = B_3$

$\dim \operatorname{im} B_3 = 2$ ↯

zweite Lsg: $\quad s_i := \#(\text{Blöcke} \geq i)$

$\dim U_1 = 2 = s_1$

$\dim U_2 = 3 = s_1 + s_2$

$\dim U_3 = 4 = s_1 + s_2 + s_3$

$\dim U_4 = 5 = s_1 + s_2 + s_3 + s_4$

$\dim U_5 = 5 = s_1 + s_2 + s_4 + s_4 + s_5$

Also: $s_1 = 2$ ← ex. 2 Blöcke insgesamt

$s_2 = 3-2=1$ ← davon einer ≥ 2

also ein Block der Größe 1

$s_3 = 4-3=1$ ← davon einer ≥ 3

$s_4 = 5-4=1$ ← davon einer ≥ 4

$s_5 = 5-5=0$ ← aber keiner ≥ 5

also ein Block der Größe 4

<u>Aufg:</u> Bestimme die 1-dim A-invarianten UVR von $\mathbb{R}^3$, für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Trick:</u> Annahme: U ist 1-dim, A-invar, $v \in U \Rightarrow Av \in U$

$\Rightarrow Av = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v$ ist Eigenvektor.

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 2 \\ -1 & -x & 4 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix}$$

$$= (3-x)\cdot(x^2+1)$$

Einzige NSt davon (in $\mathbb{R}$) ist 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \cdot (-3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 10 & -10 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot (-1)$$

$\dots \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lsg. Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ ist A-invar.

ist einziger 1-dim A-invar. UVR.

Weitere A-invar. UVR:

0-dim: $\{0\}$

1-dim:

2-dim:

3-dim: $\mathbb{R}^3$

$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$, also ist $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ A-invar.

Bsp zu 7.3.2:

$$A = \begin{pmatrix} 1&1&1&0&0\\ 1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2&1&2&1&1\\ 1&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3&2&3&1&2\\ 2&1&2&1&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{im} A^0 = \mathbb{R}^5 & & \ker A^0 \text{ ... hat dim} = 0 \\ \rotatebox{90}{$\supsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} \\ \operatorname{im} A = \mathbb{R}^3 \times \{0\}^2 & & \ker A \text{ ... hat dim} = 2 \\ \rotatebox{90}{$\supsetneq$} & & \rotatebox{90}{$\subsetneq$} \\ \operatorname{im} A^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}^3 & & \ker A^2 \text{ ... hat dim} = 3 \\ \| & & \| \\ W = \operatorname{im} A^3 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}^3 & & \ker A^3 \text{ ... hat dim} = 3 \\ \| & & \\ \vdots & & \end{array}$$

Wenn einmal gleich, dann ab da immer gleich, da:

$$\operatorname{im} A^3 = \underbrace{A \cdot (\operatorname{im} A^2)}_{} = \operatorname{im} A^2$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{im} A^4 = A \cdot (\overbrace{\operatorname{im} A^3}^{= \operatorname{im} A^2}) = A \cdot \operatorname{im} A^2 = \operatorname{im} A^3$$

Kann also $N = 2$ wählen.

$$\ker A^2 = \ker A^3 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = U$$

- Laut (b) ist $W \oplus U = \mathbb{R}^5$ (Man rechnet nicht nach, dass in der Tat $W \cap U = \{0\}$ und $W + U = \mathbb{R}^5$)
- Aufgabe für mich (um ein Bsp für (c) zu finden): Finde eine nette Matrix B, so dass $AB = BA$ ist.

$$B := A^2 - A + I_5$$

$$A \cdot B = A \cdot A^2 - A \cdot A + A \cdot I_5 = A^3 - A^2 + A$$

$$B \cdot A = A^2 \cdot A - A \cdot A + I_5 \cdot A$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \mathbb{R}^2 \times \{0\}^3$$

$$U = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \xmapsto{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{B} \vdots \qquad \in U$$

Laut (c) $\underbrace{B \cdot W \subseteq W}_{\checkmark}$, $B \cdot U \subseteq U$.

$v \in U$, also $A^3 v = 0$

$Bv \overset{?}{\in} U$ also $A^3 B v \overset{?}{=} 0$

$$A^3 B v = A \cdot A \cdot A \cdot B \cdot v = AABAv = ABAAv = B \underbrace{AAAv}_{=0} = B \cdot 0 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ist nicht A-invar.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U$$