Sei $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$

$V = \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow$ Skalarerw.: $V_\mathbb{C} = \mathbb{C}^3$

$\dim_\mathbb{R} V = 3$ $\qquad$ $\dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C} = 3$

(Allgemein: $\dim_\mathbb{R} V = \dim_\mathbb{C} V_\mathbb{C}$)

sieht nach $\mathbb{C}$-VR aus

$V_\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR: $V_\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + i\cdot b_1 \\ a_2 + i\cdot b_2 \\ a_3 + i\cdot b_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in \mathbb{R} \right\}$

sieht nach $\mathbb{R}$-VR der Dim. 6 aus

Basis von $V_\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$

Diese beiden Vektoren sind über $\mathbb{R}$ lin. unabhängig aber über $\mathbb{C}$ lin. abh.

---

zu 8.3.2 (a) $V = \mathbb{R}^3$, $V' = \mathbb{C}^3$, $W = \mathbb{C}^2$

Prüfe, dass $\operatorname{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2) \longrightarrow \underbrace{\operatorname{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)}_{= \operatorname{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)}$ eine Bij. ist.

$f \longmapsto f|_{\mathbb{R}^3}$

So ein f ist durch eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 3}$ gegeben.

$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix}$

ein g darin ist durch eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ gegeben.

hat $\dim_\mathbb{C} = 6$ und $\dim_\mathbb{R} = 12$

hat $\dim_\mathbb{R} = 12$

$z_j = a_j + i\cdot b_j$

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_4 \end{pmatrix}$

$f|_{\mathbb{R}^3}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_4 \\ b_4 \end{pmatrix}$

Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ ib+a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$ $\quad (\dim_{\mathbb{R}} V = 2)$

Sei $V' := \mathbb{C}^2$ $\quad (\dim_{\mathbb{C}} V' = 2)$

<u>Aufgabe</u>: Zeige: $V' = V_{\mathbb{C}}$

Gemeint ist: Man soll zeigen, dass V' die univ. Eigenschaft der Skal-Erw erfüllt (d.h. die Bed. aus Satz 8.3.2 (a)).

<u>Lösung</u>: • $V \subseteq V'$: ✓

• Sei W $\mathbb{C}$-VR gegeben. Prüfe, dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W), \; f \longmapsto f|_V$$

bijektiv ist.

- <u>Injektivität</u>: Prüfe, ob der Kern von $(f \mapsto f|_V)$ trivial ist. D.h. zu prüfen: Ist $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, W)$ und ist $f|_V = 0$, so ist f selbst schon 0.
  - Es reicht zu prüfen, dass V eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}^2$ enthält. Habe $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$, $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \in V$. Das ist eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}^2$.
- <u>Surjektivität</u>:

  Sei $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ gegeben. Suche $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, W)$ mit $f|_V = g$.

  Wähle f so, dass $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right)$ ist. Zu prüfen: Für $v \in V$ beliebig gilt: $f(v) \overset{?}{=} g(v)$

$$v = \begin{pmatrix} a \\ ib+a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$

$$f(v) = a \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + b \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = a \cdot g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + b \cdot g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = g(v)$$

<u>Bsp. zu 8.3.5:</u>

Sei $V := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ ib + a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$

$W := \mathbb{R}^3, \quad W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$

Sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, z.B. $\begin{pmatrix} a \\ ib+a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b \\ a \\ a+b \end{pmatrix}$

Möchte f fortsetzen zu $f_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underset{\mathbb{C}^2}{\underset{\shortparallel}{V_{\mathbb{C}}}}, W_{\mathbb{C}})$

Da V eine Basis von $\mathbb{C}^2$ enthält, ist $f_{\mathbb{C}}$ eindeutig festgelegt.

Etc; selbe Rechnung wie oben:

$$f_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dadurch wird $f_{\mathbb{C}}$ eindeutig festgelegt!

Aufg: $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$.

Bestimme die duale Basis (eine Basis von $(\mathbb{R}^2)^*$)

Lsg: Die duale Basis ist $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{1\times 2}$

mit $\alpha_1(v_1) = 1 \qquad \alpha_2(v_1) = 0$

$\alpha_1(v_2) = 0 \qquad \alpha_2(v_1) = 1$

Also: ~~falls~~ $\alpha_1 = (a_1 \ \ a_2)$: $\underset{3 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2}{\underset{\shortparallel}{(a_1 \ \ a_2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}} = 1 \qquad \underset{2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2}{\underset{\shortparallel}{(a_1 \ \ a_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}} = 0$

Also gesucht: Lsg von $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$

Lsg ist $a_1 = 3$, $a_2 = -2$.

D.h. $\alpha_1 = (3 \;\; -2)$

Entsprechend: $\alpha_2 = (a_1' \;\; a_2')$: $(a_1' \; a_2') \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad (a_1' \; a_2') \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$

$\rightsquigarrow \alpha_2 = (-4 \;\; 3)$

Aufg: Stelle den Vektor $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ in der obigen Basis v_1, v_2 dar.

$\alpha_1(w) = 9 - 14 = -5$

$\alpha_2(w) = -12 + 21 = 9$

Also sollte haben: $w = -5 \cdot v_1 + 9 \cdot v_2$

$$= -5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 + 18 \\ -20 + 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Blatt 10, Aufg. 4: Ist ganz einfach falls $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ ist:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) \overset{?}{=} \big(\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)}\big)_{\mathbb{C}}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}, W_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = \mathbb{C}^{m \times n}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad \big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)\big)_{\mathbb{C}} = (\mathbb{R}^{m \times n})_{\mathbb{C}}$$

$$\mathbb{C}^{m \times n} = (\mathbb{R}^{m \times n})_{\mathbb{C}}$$