Rechnen im Tensorprodukt

Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V
und $w_1 \dots w_m$ eine Basis von W,
so ist
$$\begin{matrix} v_1 \otimes w_1, & \dots, & v_1 \otimes w_m \\ v_2 \otimes w_1, & \dots, & v_2 \otimes w_m \\ \vdots & & \\ v_n \otimes w_1, & \dots, & v_n \otimes w_m \end{matrix}$$
eine Basis von $V \otimes W$.

$V = \mathbb{R}^2$
$W = \mathbb{R}^3$

Basis von $V \otimes W$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Basis von $V \oplus W$:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

---

stelle $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ in der obigen Basis dar

$$\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 2 \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) + \dots$$

$$\| $$

$$\left(2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \otimes \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \overset{8.4.7(c)}{=} \left(2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \otimes \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$+ \left(3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \otimes \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$2\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right)+3\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$=2\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+2\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)+3\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+3\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Elemente von $V\otimes W$ $(V=\mathbb{R}^2,\ W=\mathbb{R}^3)$ als Matrix schreiben:

Jeder Vektor in $V\otimes W$ lässt sich schreiben als

$$a_{11}\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+a_{12}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+a_{13}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$+a_{21}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+a_{22}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+a_{23}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Kurzschreibweise: $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$

In dieser Notation: $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Anderes Bsp: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=\left(3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\otimes\left(5\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$=3\cdot5\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+3\cdot6\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+\dots$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot5 & 3\cdot6 & 3\cdot7\\ 4\cdot5 & 4\cdot6 & 4\cdot7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 18 & 21\\ 20 & 24 & 28\end{pmatrix}$$

Allgemein: $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot x & a\cdot y & a\cdot z\\ bx & by & bz\end{pmatrix}$

Noch ein Bsp: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\neq\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right)$$

Gleiche Rechnung mit 8.4.7:

$$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\overset{(a)}{=}\left(3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=3\cdot\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\left(3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

In $V\otimes W$ existieren Vektoren, die sich nicht in der Form $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ schreiben lassen. Und wenn sie sich so schreiben lassen, ist es nicht eindeutig

Jeder Vektor aus $V\oplus W$ lässt sich eindeutig schreiben als $\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)$

Bsp zu Bsp 8.4.2(a):

$$U=\mathbb{R}^3,\quad V=\mathbb{R}^2,\quad \mathrm{Hom}(U,V)=\mathbb{R}^{2\times 3}$$

$U \ni \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$, $\quad \mathrm{Hom}(U,V) \ni \begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}$

NR: $\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$U\times\mathrm{Hom}(U,V)\longrightarrow V$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$$

Laut Linearität im ersten Argument soll folgen:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Laut Linearität im 2. Argument soll folgen:

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe: Sei V ein $\mathbb{R}$-VR. Zeige: $V \otimes \mathbb{R}^2 = \overbrace{V \oplus V}^{8.4.5:\ V}$

Gemeint ist: Suche natürlichen Isomorphismus.

Damit das Sinn macht, brauche eine bilin. Abb. $f: V \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \oplus V$

Anders ausgedrückt: Zeige, dass $V \oplus V$ die univ. Eig. des Tensorprodukts von $\underset{8.4.5:\ U_1}{V}$ mit $\underset{8.4.5:\ U_2}{K^2}$ erfüllt.

Setze $f(\underset{\in V}{v}, \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}) = (a_1 v, a_2 v)$

$\left(v, \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\right) \longmapsto a_1 v + a_2 v \in V$ ist auch bilinear.

Prüfe, dass dies die univ. Eig. erfüllt:

Sei also W gegeben. Zu prüfen: $\mathrm{Hom}(V \oplus V, W) \text{ „=" } \mathrm{Bil}(V \times \mathbb{R}^2, W)$

Genauer: $g \longmapsto g \circ f$ ist eine Bijektion

$$V \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} V \oplus V \xrightarrow{g} W$$

Anders ausgedrückt: Zeige: Jede bil. Abb $h: V \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow W$ lässt sich auf eindeutige Weise als $h = g \circ f$ für ein geeignetes g schreiben

Um das zu lösen, muss die bilin. Abb von $V \times \mathbb{R}^2$ nach W verstehen: Sei $h: V \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow W$ bilinear. Dann ist $h_1: v \longmapsto h(v, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$ linear und $h_2: v \longmapsto h(v, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$ auch.

Bsp: $V=\mathbb{R}^3$, $W=\mathbb{R}$

$h\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = x\cdot a + 2yb$

$h_1\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = x\cdot 1$

$h_2\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = 2\cdot y\cdot 1$

Außerdem gilt: $h\left(v,\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right) = a\cdot h\left(v,\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + b\cdot h\left(v,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$= a\cdot h_1(v) + b\cdot h_2(v)$

Und: Für jedes Paar von lin. Abb $h_1, h_2 : V \to W$ erhalte auf diese Art eine bil. Abb. $V\times\mathbb{R}^2 \to W$ (*)

Sei $g: V\oplus V \to W$ gegeben. $g((v,v')) = \underbrace{g((v,0))}_{g_1(v)} + \underbrace{g((0,v'))}_{g_2(v')}$

$$V\times\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} V\oplus V \xrightarrow{g} W$$

Dann ist $\overbrace{(g\circ f)\left(v,\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)}^{\text{bil. Abb.}}$

$\shortparallel$

$g\left(f\left(v,\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)\right)$

$\shortparallel$

$g((av,bv)) = g_1(av) + g_2(bv) = a\, g_1(v) + b\, g_2(v)$

Bei (*) haben wir gesehen, dass alle Bil. Abb. $V\times\mathbb{R}^2 \to W$ genau diese Form haben.

Was bedeutet „natürlicher" Isomorphismus von $V\otimes K^2$ nach $V\oplus V$?

- Für jeden VR V habe einen Iso $h_V: V\otimes K^2 \xrightarrow{\sim} V\oplus V$
- Ist $g: V\to V'$, so gilt:

$$\begin{array}{ccc} V\otimes K^2 & \xrightarrow{h_V} & V\oplus V \\ \tilde g \downarrow & & \downarrow \tilde g \\ V'\otimes K^2 & \xrightarrow{h_{V'}} & V'\oplus V' \end{array}$$

$$\tilde g \circ h_V = h_{V'} \circ \tilde g$$