Bsp zu 8.4.9

$U = U' = \mathbb{R}^2$, $\quad f: U \longrightarrow U' \quad$ Matrix: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix}$$

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad g: V \longrightarrow V' \quad$ Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$V' = \mathbb{R}$ $\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \longmapsto (y_1 + y_2 + 5y_3)$

Nach Satz 8.4.9 ex genau eine Abb. $f \otimes g: \underbrace{\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3}_{\mathbb{R}^{2\times 3} = \mathbb{R}^6} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}}_{\mathbb{R}^{2\times 1} = \mathbb{R}^2}$

s. d. für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $(f \otimes g)\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_1 \end{pmatrix} \otimes (y_1 + y_2 + 5y_3)$

In Matrix-Schreibweise wie im letzten Tutorium: $\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2x_2(y_1+y_2+5y_3) \\ 3x_1(y_1+y_2+5y_3) \end{pmatrix}$

Insbes:

$\left.\begin{matrix} x_1 = 1 & x_2 = 0 \\ y_1 = 1 & y_2 = y_3 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} x_1 = 1 & x_2 = 0 \\ y_2 = 1 & y_1 = y_3 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} x_1 = 0, & x_2 = 1 \\ y_1 = 1 & y_2 = y_3 = 0 \end{matrix}\right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also: Wenn $f \otimes g$ existiert, muss gelten:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2d + 2e + 10f \\ 3a + 3b + 15c \end{pmatrix}$$

Wenn man hier das einsetzt, erhält man rechts $\begin{pmatrix} 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 10x_2y_3 \\ 3x_1y_1 + \ldots \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \end{pmatrix}$$

Wir haben also gerade in diesem Bsp von Hand nachgerechnet, dass der Satz funktioniert.

<u>Was ist die Matrix zu $f \otimes g$?</u>

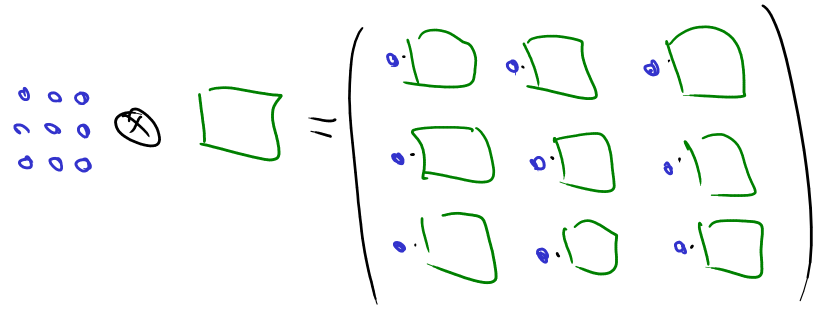
Mit der rosa Identifikation $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$, $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 10 \\ 3 & 3 & 15 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Wie kommt diese Matrix zustande?</u>

Allgemeiner:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 & a_{11} b_2 & a_{11} b_3 & a_{12} b_1 & a_{12} b_2 & a_{12} b_3 \\ a_{21} b_1 & a_{21} b_2 & a_{21} b_3 & a_{22} b_1 & a_{22} b_2 & a_{22} b_3 \end{pmatrix}$$

Noch allgemeiner, bildlich:



<u>Bsp zu 8.4.13</u>: $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{R}^3$

Zeilen und Spalten umgekehrt wie oben

$$L \otimes_K V = \underbrace{\mathbb{C}}_{\{a + i \cdot b \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$$

Elemente davon: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$

$\begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \\ e + if \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

Bsp: $3 + i7 \in \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 3 + i7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (3 + i7) \\ 2 \cdot (3 + i \cdot 7) \\ -1 \cdot (3 + i \cdot 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 7i \\ 6 + 14i \\ -3 - 7i \end{pmatrix}$$

$$(3, 7) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$$

Bsp zu 8.4.14:

$$U = \mathbb{R}^2, \quad V = \mathbb{R}^3$$
$$U^* = \mathbb{R}^{1\times 2}$$

$$\alpha = (3 \;\; 7) \in U^* \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

- Was ist dann $\underbrace{f(\alpha, v)}_{=: A \in \mathrm{Hom}(U,V) = \mathbb{R}^{3\times 2}}$ in 8.4.14?

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=u} = \alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot v = \left| \underbrace{(3 \;\; 7)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\alpha\left(\binom{x}{y}\right) \in \mathbb{R}^3} \right| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (3x + 7y)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x + 7y \\ 6x + 14y \\ -3x - 7y \end{pmatrix}$$

Also: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ $\qquad f\left((3 \;\; 7), \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$

- Was ist $U^* \otimes V$ ← Elemente davon lassen sich auf natürliche Weise als Matrizen schreiben:

$$(3 \;\; 7) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$$

nur falls U endl-dim

↓

- $U^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}(U, V)$
- Ist der Iso $U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U,V)$ aus 8.4.14 wirklich der, der eine Matrix aus $U^* \otimes V$ auf die gleiche Matrix in $\mathrm{Hom}(U,V)$ abbildet?
  - Dieser Iso ist dadurch festgelegt, was er mit Vektoren der Form $\alpha \otimes v$ machen soll, nämlich: $\alpha \otimes v$ soll von diesem Iso auf $f(\alpha, v)$ abgebildet werden.
  - Also im obigen Bsp: $\underbrace{(3 \;\; 7) \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}}$ soll auf $\underbrace{f\left((3 \;\; 7), \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}_{= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 14 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}}$ abgebildet werden.

- Allgemeiner: Iso bildet jede Matrix der Form $(a_1\ a_2)\otimes\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ auf sich selbst ab.

$$(a_1\ a_2)\otimes\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1\\ \vdots & \vdots \\ a_1b_3 & \vdots\end{pmatrix}$$

- Insbes. werden $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix}, \dots$ auf sich selbst abgebildet.
- Da Iso linear, wird jede Matrix auf sich selbst abgebildet.

- Das Inverse von Iso:

$$A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$$
$$\downarrow$$
$$\sum_i \alpha_i \otimes A u_i = (1\ 0)\otimes \underbrace{A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\text{erste Spalte von } A} + (0\ 1)\otimes \underbrace{A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\text{2. Spalte von } A}$$

α_i: Basis von U^* $\qquad$ u_i: Basis von U

1. Sp. von A

$$\begin{pmatrix}\ast&0\\\ast&0\\\ast&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&\ast\\0&\ast\\0&\ast\end{pmatrix}$$

$$= A$$