Bsp zu 8.6.11

$V = \mathbb{R}^2$

$A = \mathbb{R}^{3\times 3}$ (mit Matrizenmultiplikation)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ x+y & 2x & 0 \end{pmatrix}$$ ist eine lin. Abb.

- Laut Satz kann man das zu einem Alg.-Homo $\tilde{f}: \underbrace{TV}_{} \longrightarrow A$ fortsetzen: ⟵ Fasse V als UVR von TV auf

$$TV = \underbrace{V^{\otimes 0}}_{\mathbb{R}} \oplus \underbrace{V^{\otimes 1}}_{V} \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots$$

$$\tilde{f}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ x+y & 2x & 0 \end{pmatrix}$$

wird als Element von TV aufgefasst, nämlich als $\left(0, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 0, 0, \ldots\right) \in TV$

$$\tilde{f}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{V^{\otimes 2}}\right) = \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \cdot \tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ x+y & 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x' \\ y' & 0 & 0 \\ x'+y' & 2x' & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cdot(x'+y') & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$\left(0, 0, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, 0, 0, \ldots\right) \in TV$

- $\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \ldots\ldots$

  So kann $\tilde{f}$ für alle Basisvektoren von TV bestimmt werden für die Basis aus 8.6.7.

- $\tilde{f}(r) = \tilde{f}(r\cdot 1) = r \cdot \tilde{f}(1) = r \cdot \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & & \\ & r & \\ & & r \end{pmatrix}$

  $r \in \mathbb{R}$

  $(r, 0, 0, 0, \ldots)$

  Neutrales Element von $\mathbb{R}^{3\times 3}$

Geht das auch für SV statt TV? Bsp:

$V = \mathbb{R}^2$

$A = \mathbb{R}^{3\times 3}$ (mit Matrizenmultiplikation)

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ x+y & 2x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist eine lin. Abb.}$$

- Gibt es einen Alg-Homo $\tilde{f}: SV \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3}$, der f fortsetzt?

$$V \subseteq SV = \underbrace{V^{\otimes 0}/U_0}_{\substack{\| \;\; U_0=\{0\} \\ V^{\otimes 0} = \mathbb{R}}} \oplus \underbrace{V^{\otimes 1}/U_1}_{\substack{\| \;\; U_1=\{0\} \\ V^{\otimes 1} = V}} \oplus V^{\otimes 2}/U_2 \oplus \dots$$

$$\tilde{f}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{als Element von } SV}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ x+y & 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ x+y & 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x' \\ y' & 0 & 0 \\ x'+y' & 2x' & 0 \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\tilde{f}\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x' \\ y' & 0 & 0 \\ x'+y' & 2x' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ x+y & 2x & 0 \end{pmatrix}$$

nicht immer gleich. Also Widerspruch falls x, y, x', y' geeignet gewählt sind.

- Antwort: Nein.

Äußere Algebra

Laut 8.7.6 ist $\Lambda^3 V$ eindimensional mit Basis-Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^3$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\Lambda^3 V} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 29 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Multilin}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 29 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\overset{\text{''}}{0}}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -29 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 29 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Mul.}}{=} \begin{pmatrix} -29 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(29 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\overset{\text{1) Mul}}{=} 29 \cdot \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=0} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

$$\overset{8.7.3}{=} - \underbrace{\begin{pmatrix} -29 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(-2)} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{wie oben}}{=} - \begin{pmatrix} -31 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Mul}}{=} 31 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\cdot(-1)} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 31 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\cdot(-1)}$$

$$= 31 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Laut 8.7.6 soll $31 = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ✓

Bsp: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{(\cdot 1)}$ with $\in \Lambda^2 \mathbb{R}^4$ $\overset{\text{wie oben}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wie allgemein gilt 8.7.3?

(1) $a \wedge v_i \wedge b \wedge v_j \wedge c = - a \wedge v_j \wedge b \wedge v_i \wedge c$ für $v_i, v_j \in V$, $a, b, c \in \Lambda V$

Begründung am Bsp: $a = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{a_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{a_2} + 3\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}}_{a_3}$

das $\rightarrow$ $a_1\wedge v_i\wedge b\wedge v_j\wedge c = -\,a_1\wedge v_j\wedge b\wedge v_i\wedge c$

$+$

das $\rightarrow$ $a_2\wedge v_i\wedge b\wedge v_j\wedge c = -\,a_2\wedge v_j\wedge b\wedge v_i\wedge c$

$+$

$3\cdot$ das $\rightarrow$ $a_3\wedge v_i\wedge b\wedge v_j\wedge c = -\,a_3\wedge v_j\wedge b\wedge v_i\wedge c$

$$\underbrace{(a_1+a_2+3\cdot a_3)}_{a}\wedge v_i\wedge b\wedge v_j\wedge c = \dots$$

$$(2)\quad a\wedge\overbrace{\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)}^{\text{statt } v_i}\wedge b\wedge\overbrace{\left(\begin{pmatrix}0\\5\\11\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}12\\10\\1\end{pmatrix}\right)}^{\text{statt } v_j}\wedge c$$

$$= -\,a\wedge\begin{pmatrix}0\\5\\11\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge b\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}12\\10\\1\end{pmatrix}\wedge c$$

$$= a\wedge\begin{pmatrix}0\\5\\11\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}12\\10\\1\end{pmatrix}\wedge b\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge c$$

Warum hat das in der Vorlesung mit einem Vektor geklappt?

$$0 = a\wedge(v_i+v_j)\wedge b\wedge(v_i+v_j)\wedge c$$

$\uparrow$ stimmt falls $v_i, v_j \in V$ ($\Rightarrow v_i+v_j\in V$)

Falls $v_i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v_j = \begin{pmatrix}0\\5\\11\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}12\\10\\1\end{pmatrix}$ geht das nicht, da

$$v_i+v_j = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\5\\11\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}12\\10\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$$

$$a\wedge b\wedge c\wedge d = -\,d\wedge b\wedge c\wedge a = d\wedge a\wedge c\wedge b$$

$a,b,c,d\in V$

$$-2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=-4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Frage: Lässt sich $\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ schön einfach ausdrücken?

Habe eine Basis von $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ der Form (nach 8.7.12)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{e_1\wedge e_2},\ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_1\wedge e_3},\ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_1\wedge e_4},\ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{e_2\wedge e_3},\ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_2\wedge e_4},\ \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{e_3\wedge e_4}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=(e_1+2\cdot e_3+3\cdot e_4)\wedge(e_2+e_3)$$

Mul

$$=e_1\wedge e_2+e_1\wedge e_3+\underbrace{2e_3\wedge e_2}_{(-2)\cdot e_2\wedge e_3}+\underbrace{2e_3\wedge e_3}_{0}+\underbrace{3e_4\wedge e_2}_{(-3)e_2\wedge e_4}+\underbrace{3e_4\wedge e_3}_{(-3)e_3\wedge e_4}$$

$$=e_1\wedge e_2+e_1\wedge e_3-2e_2\wedge e_3-3e_2\wedge e_4-3e_3\wedge e_4$$

Neue Berechnung:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\30\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=(e_1+2e_2+30e_3)\wedge(1e_1+e_3)\wedge(e_1+1e_2)$$

$$=\underbrace{e_1\wedge e_1\wedge e_1}_{=0}+\underbrace{e_1\wedge e_3\wedge e_2}_{=-e_1\wedge e_2\wedge e_3}+\underbrace{2e_2\wedge e_1\wedge(e_1+e_2)}_{0}$$
$$+\underbrace{2e_2\wedge e_3\wedge e_1}_{=2e_1\wedge e_2\wedge e_3}+\underbrace{30e_3\wedge e_1\wedge e_2}_{30e_1\wedge 1e_2\wedge 1e_3}$$
$$=\underbrace{(-1+2+30)}_{31}(e_1\wedge e_2\wedge e_3)$$