Determinante mit Satz 8.7.9 bestimmen:

Bsp: $V = \mathbb{R}^3$, $f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Was sollte $\det f$ nach 8.7.9 sein?

$$\Lambda^3 f : \Lambda^3 \mathbb{R}^3 \longrightarrow \Lambda^3 \mathbb{R}$$

Wähle ein $w \in \Lambda^3 \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und bestimme $(\Lambda^3 f)(w)$ und schreibe es in der Form $r \cdot w$. Dieses r ist $\det f$.

$$\cancel{w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 0$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Andere mögliche w?

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ sind l.u. $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \neq 0$$

Könnte also auch $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$ als w nehmen.

$$(\Lambda^3 f)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \wedge f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \wedge f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= (e_1 + 2e_2) \wedge (-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \wedge (2e_1 + e_2 + 3e_3) = \ldots$$

Bsp zu 8.7.12:

Frage 1: Sind $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ lin. unabh?

Prüfe das mit 8.7.12(a), d.h. prüfe, ob $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{\in \Lambda^3 \mathbb{R}^4} = 0$ ist.

Drücke dies in der Basis aus 8.7.11 aus, also

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = (e_1 + 2e_2) \wedge (2e_1 + e_4) \wedge (e_3 + e_4)$$

$$= \cancel{e_1 \wedge 2e_1 \wedge e_3} + \cancel{e_1 \wedge 2e_1 \wedge e_4} + e_1 \wedge e_4 \wedge e_3 + \cancel{e_1 \wedge e_4 \wedge e_4}$$
$$+ 2e_2 \wedge 2e_1 \wedge e_3 + 2e_2 \wedge 2e_1 \wedge e_4 + 2e_2 \wedge e_4 \wedge e_3 + \cancel{2e_2 \wedge e_4 \wedge e_4}$$

$$= -e_1 \wedge e_3 \wedge e_4 - 4e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - 4e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 - 2e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \neq 0$$

Frage 2: Sei $U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

und $U' = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

Ist $U = U'$?

Prüfe das mit 8.7.12(b), d.h. prüfe, ob $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ ein Vielfaches von $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ ist.

Drücke dazu auch $\begin{pmatrix}0\\-4\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}3\\2\\1\\2\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$ in der Basis

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, \quad e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

aus. Danach lässt sich das ablesen.

Dualraum

Bsp: $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 = V$

$$\underset{\underset{(2\ 2\ 4)}{\shortparallel}}{\alpha} \in V^* = (\mathbb{R}^3)^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{1\times 3}$$

Da $v \in V$ und $\alpha \in V^*$ kann aus α und v eine Zahl ausrechnen:

$$\alpha(v) = (2\ 2\ 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 8$$

Präziser ausgedrückt: Habe eine bilineare Abb. $V^* \times V \longrightarrow K$

$(\alpha, v) \longmapsto \alpha(v)$

$$\alpha(3v) = (2\ 2\ 4)\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 24$$

$$(2\alpha)(v) = (4\ 4\ 8)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 16$$

$$\left((2\ 2\ 4) + (1\ 0\ 0)\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2\ 2\ 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Möchte einen UVR U von $\mathbb{R}^4$ beschreiben.

Ansatz 1: Gebe Erzeuger von U an, also z.B.: $U = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Ansatz 2: Gebe $\underbrace{\text{Gleichungen}}_{\text{homog. Lineare}}$ an, die die Elemente von U erfüllen,

also z.B. $U = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} \,\middle|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_4 - 2x_2 = 0 \right\}$

$$\alpha_1 := \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 + x_2 + x_3 \right) \in (\mathbb{R}^4)^*$$

$$\alpha_2 := \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto x_4 - 2x_2 \right) \in (\mathbb{R}^4)^*$$

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha_1(x) = 0, \alpha_2(x) = 0 \}$$

Skalarerweiterungen

$K = \mathbb{Q} \qquad L = \mathbb{R}$

- Sei V ein $\mathbb{Q}$-VR. Was ist $V_{\mathbb{R}}$?
- Meine Anschauung: $V = \mathbb{Q}^n$. Dann ist $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$
- Andere Sichtweise:
  - Jedes $v \in V$ ist auch ein Element von $V_{\mathbb{R}}$
  - Als Element von $V_{\mathbb{R}}$ kann man dieses v mit reellen Zahlen multiplizieren.

Analoges $V \otimes V$:

$v_1 \otimes v_2 \in V \otimes V$

Bsp: $v_1, v_2 \in V \quad \rightsquigarrow \quad \sqrt{2} \cdot v_1 + \pi \cdot v_2 \in V_{\mathbb{R}}$

Das macht keinen Sinn, wenn man $v_{1/2}$ als Element von V auffasst. Aber es macht Sinn, wenn man $v_{1/2}$ als Element von $V_{\mathbb{R}}$ auffasst.

Bsp von Bsp: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{Q}^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3$

$$\sqrt{2} \cdot v_1 + \pi \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2\pi \\ \sqrt{2} + \pi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Jeder Vektor in $V_{\mathbb{R}}$ lässt sich schreiben als Summe von endl. vielen $r \cdot v$ für $r \in \mathbb{R}$, $v \in V$.

Jeder Vektor in $V \otimes V$ lässt sich schreiben als Summe von endl. vielen $v \otimes v'$ für $v, v' \in V$

Ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\sqrt{2} \cdot v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_2 \in V_{\mathbb{R}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 - 0 \\ \sqrt{2} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0$$

Aufg: Sei V ein endl-dim K-VR und $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent.
Zeige: f_L ist nilpotent.

Lsg: Identifiziere V mit K^n. Dann ist f gegeben durch $A \in K^{n\times n}$.
f_L ist durch die selbe Matrix gegeben (aufgefasst als Matrix in $L^{n\times n}$)
Ist A nilpot, also $A^r = 0$ für ein $r \geq 1$,
dann bleibt $A^r = 0$ auch wenn man A als Matrix in $L^{n\times n}$ auffasst.
Also ist auch f_L nilpotent.

Andere Lösung: f nilpot heißt: $\underbrace{f\circ \dots \circ f}_{r} = 0$

f_L nilpot? $\underbrace{f_L \circ \dots \circ f_L}_{} \overset{?}{=} 0$

8.3.9(b)

$= (f\circ \dots \circ f)_L$

$= 0_L = 0$

Zu 8.5

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x + y - 2z$$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$ $\qquad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$, also $U \subseteq \ker f$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^3/U \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{kan}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{kan}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

das existiert.

diese Abb soll das selbe machen wie f, muss aber $\mathrm{kan}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ auf das selbe abbilden wie $\mathrm{kan}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

$\mathbb{R}^3$, wobei aber $v, v' \in \mathbb{R}^3$ miteinander identifiziert werden, wenn $v - v' \in U$

(da $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in U$

- Zusammenfassung: Damit $\tilde{f}$ existiert muss gelten:
  Wenn $v_1 - v_2 \in U$, dann ist $v_1 - v_2 \in \ker f$.
- Kürzer ausgedrückt: Damit $\tilde{f}$ existiert muss $U \subseteq \ker f$ sein

Das kann nur funktionieren, wenn $f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right)$

$\Updownarrow$

$f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\right) = 0$

$\Updownarrow$

$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} \in \ker f$