Lineare Algebra II
Blatt 3

HHU Düsseldorf, SoSe 21

Abgabe bis Montag, 03.05.2021, 10:15 Uhr, im Ilias

Aufgabe 1 (5 Punkte): Bestimmen Sie mit Hilfe von Satz 6.6.7 alle reellen Zahlen c, sodass die Matrix

$$A_c = \begin{pmatrix} c & -2 & -2 \\ -2 & c & -2 \\ -2 & -2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

positiv definit ist. Zeigen Sie dafür zunächst, dass das charakteristische Polynom von A_c durch $(x-(c-4))(x-(c+2))^2$ (bzw. durch $-(x-(c-4))(x-(c+2))^2$ je nach Definition des charakteristischen Polynomes) gegeben ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sie K ein Körper und sei $A \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad m.

(i) Rechnen Sie nach, dass die Matrix $\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i A^i$ die Inverse zu der Matrix $I_n + A$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass auch die Matrix $I_n - A$ invertierbar ist, indem Sie die Inverse analog zu Teil (i) direkt angeben.

(iii) Sei nun $E \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Sind allgemeiner die Matrizen $E + A$ und $E - A$ invertierbar?

Aufgabe 3 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad m.

(i) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v, Av, A^2v, \ldots, A^{m-1}v$ für jeden Vektor $v \in K^n$, welcher $A^{m-1}v \neq 0$ erfüllt, linear unabhängig sind.

(ii) Folgern Sie, dass $m \leq n$ gelten muss.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei K ein Körper und sei $f\colon K^n \times K^n \to K$ eine symmetrische Bilinearform.

(i) Weisen Sie nach, dass die Menge

$$O(f,K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid f(Av, Aw) = f(v,w) \text{ für alle } v, w \in K^n\}$$

mit der Multiplikation von Matrizen eine Gruppe bildet.

(ii) Sind Gruppen der Form $O(f,K)$ stets abelsch?

(iii) Wir betrachten nun die symmetrische Bilinearform

$$f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,((x,y),(x',y')) \mapsto xx'.$$

Bestimmen Sie die Gruppe $O(f,\mathbb{R})$, d.h. geben Sie für eine reelle (2×2)-Matrix A genau an welche Einschränkungen man an die Wahl der vier Einträge hat, damit A ein Element von $O(f,\mathbb{R})$ definiert.

Aufgabe 1

Da offenbar $\bar{A}_c^T = A_c$ ist A_c nach Satz 6.6.7 genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A_c positiv sind. Wir bestimmen daher nun die Eigenwerte von A_c:

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A_c) = \det\begin{pmatrix} x-c & 2 & 2 \\ 2 & x-c & 2 \\ 2 & 2 & x-c \end{pmatrix}$$

$$= (x-c)^3 + 8 + 8 - 4(x-c) - 4(x-c) - 4(x-c)$$

$$= (x-c)^3 - 12(x-c) + 16$$

$$= (x - c + 2\cdot 2)(x - c - 2)^2$$

$$= (x-(c-4))(x-(c+2))^2$$

$$(a+2b)(a-b)^2$$
$$= (a+2b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a^3 - \cancel{2a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{2a^2b} - \underset{3}{\cancel{4}}ab^2 + 2b^3$$

Somit ist A_c positiv definit genau dann, wenn

$c - 4 > 0$ und $c + 2 > 0$

gelten, also wenn $c > 4$ gilt.

Aufgabe 2

(i)

Es gilt

$$\left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i A^i\right)\left(I_n + A\right) = \left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i A^i\right)\cdot I_n + \left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i A^i\right)A$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \underbrace{(A^i \cdot I_n)}_{A^i} + \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i \underbrace{(A^i \cdot A)}_{A^{i+1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i A^i + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i-1} A^i$$

$$= \underbrace{A^0}_{=I_n} + (-1)^{m-1}\underbrace{A^m}_{=0}$$

$$= I_n$$

Nach einem Übungsblatt der LA I sind Linksinverse in einer Gruppe auch Rechtsinverse, sodass wir

$$(I_n + A)^{-1} = \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^i A^i$$

erhalten.

(ii)

Gilt $A^m = 0$, so auch $(-A)^m = (-1)^m \underbrace{A^m}_{=0} = 0$. Zudem ist m auch wieder der Nilpotenzgrad. Daher erhalten wir mit Aufgabenteil (i)

$$(I_n - A)^{-1} = (I_n + (-A))^{-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i (-A)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{(-1)^{2i}}_{=1} A^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} A^i.$$

(iii)

Nein, betrachte dafür zum Bsp.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{invertierbar,} \\ \text{da det} = 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{nilpotent,} \\ \text{da } ()^2 = 0}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{nicht invertierbar,} \\ \text{da det} = 0}}$$

$$\overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} - \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 3

(i)

Sei $v \in K^n$ ein Vektor mit $A^{m-1}v \neq 0$. Dann gilt auch $A^i v \neq 0$ für alle $0 \leq i \leq m-2$ (ansonsten multiplizier mit A^{m-1-i} und erhalte Widerspruch zu $A^{m-1}v \neq 0$). Wir betrachten nun die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i A^i v = 0 \qquad (*)$$

für $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in K$. Multiplikation von $(*)$ mit A^{m-1} liefert dann

$$\lambda_0 \underbrace{v}_{\neq 0,\text{ s.o.}} = \sum \lambda_i A^{m-1+i} v \overset{A^m=0}{=} A^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i A^i v\right) = A^{m-1} \cdot 0 = 0,$$

sodass $\lambda_0 = 0$ gelten muss. Multiplizieren wir $(*)$ nun mit A^{m-2}, so erhalten wir analog

$$\underbrace{\lambda_0}_{=0} v + \lambda_1 \underbrace{Av}_{\neq 0,\text{ s.o.}} = 0$$

und somit $\lambda_1 = 0$. Allgemeiner folgt durch Multiplikation von $(*)$ mit A^{m-1-i} und aus

$$\lambda_0 = \dots = \lambda_{i-1} = 0,$$

dass auch $\lambda_i = 0$ gelten muss. Somit folgt die Behauptung.

(ii)

Da eine maximal linear unabhängige Teilmenge des K^n Kardinalität n besitzt, folgt nun aus Teil (i), dass $m \leq n$ gelten muss.

Aufgabe 4

man kann natürlich (ist sogar schnellerfolg) auch nachweisen, dass $O(f,K)$ eine Untergruppe von $GL_n(K)$ ist.

(i)

Wir begründen zunächst, dass die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $O(f,K)$ definiert.

Das würde dann nur der Teil (+)

Seien also $A, B \in O(f,K)$, d.h. A und B sind invertierbar und es gelten

$$f(Av, Au) = f(v,u)$$

und

$$f(Bv, Bu) = f(v,u)$$

für alle $v, u \in K^n$. Da $GL_n(K)$ eine Gruppe unter der Matrizenmultiplikation bildet, ist AB auch invertierbar und es gilt nun

(+) $$f((AB)v, (AB)u) = f(A(Bv), A(Bu)) \overset{A \in O(f,K)}{=} f(Bv, Bu) \overset{B \in O(f,K)}{=} f(v,u).$$

Somit definiert die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $O(f,K)$.

Schauen wir uns nun die drei Gruppenaxiome an:

(1) Assoziativität der Verknüpfung

Da $O(f,K)$ eine Teilmenge von $GL_n(K)$ ist

und die Matrizenmultiplikation auf $GL_n(K)$ assoziativ, erbt $O(f,K)$ diese Eigenschaft.

(+) (2) Existenz eines neutralen Elementes

Da offenbar I_n invertierbar ist und

$$f(\underbrace{I_n v}_{v}, \underbrace{I_n u}_{u}) = f(v,u)$$

gilt, liegt I_n in $O(f,K)$. Da $I_n \cdot A = A = A \cdot I_n$ sogar für alle $A \in K^{n \times n}$ gilt, ist I_n das neutrale Element von $O(f,K)$.

(+) (3) Da $O(f,K) \subset GL_n(K)$, besitzt jede Matrix $A \in O(f,K)$ eine inverse Matrix. Bleibt zu überprüfen, dass diese auch wieder in $O(f,K)$ enthalten ist. Sei dazu $A \in O(f,K)$. Dann gilt

$$f(Av, Au) = f(v,u) = f(A^{-1}(Av), A^{-1}(Au))$$

für alle $v,u \in K^n$. Da A invertierbar ist, ist aber jeder Vektor aus K^n von der Form Av, sodass die gewünschte Eigenschaft für alle Paare von Vektoren aus K^n gilt.

Also ist $O(f,K)$ eine Gruppe.

(ii)

Nein, betrachte dafür das Standardskalarprodukt $\langle -,- \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ und

$$O(\langle -,- \rangle, \mathbb{R}) = O_2(\mathbb{R}).$$

Spiegelung an y-Achse

Drehung um 90° (im UZS)

Da $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar sind ($\det \neq 0$) und

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T}_{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sind $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ orthogonale Matrizen. Nun gelten

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit sind Gruppen der Form $O(f, K)$ nicht immer abelsch.

(iii)

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(f, \mathbb{R})$, d.h. es gilt

$\underbrace{\det(A)}_{ad-bc} \neq 0$

und

$$\underbrace{(ax+by)(ax'+by')}_{a^2xx' + abxy' + abyx' + b^2yy'} = f\left(\underbrace{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}}, \underbrace{A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} ax'+by' \\ cx'+dy' \end{pmatrix}}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = xx'.$$

Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ erhalten wir also die Glg.

$a^2 = 1$

und für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ die Glg.

$b^2 = 0$.

Somit also $a = \pm 1$ und $b = 0$. Da $ad - bc \neq 0$ gelten muss, muss zudem $d \neq 0$ erfüllt sein. Andererseits ist eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ invertierbar, da $\det\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \pm d \neq 0$ und es gilt

$$f\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \pm x \\ cx+d \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \pm x' \\ cx'+dy' \end{pmatrix}}\Big) = (\pm x)(\pm x') = xx' = f\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\Big).$$

Somit gilt

$$O(f, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; d \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a = 1 \vee a = -1,\ d \neq 0 \right\}.$$