....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 1

Abgabe am 27.4.2017 bis 8:30 Uhr

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei V ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für beliebige $u, v \in V$ gilt: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $V \neq \{0\}$ ein unitärer Vektorraum. Die Dreiecksungleichung (siehe Vorlesung) besagt, dass für $u, v \in V$ gilt: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(a) Gibt es linear abhängige Vektoren $u, v \in V$, so dass $\|u+v\| < \|u\| + \|v\|$ gilt?

(b) Gibt es linear unabhängige Vektoren $u, v \in V$, so dass $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$ gilt?

Geben Sie Beispiele an oder begründen Sie, dass es solche Vektoren nicht gibt.

Hinweis: Der Beweis der Dreiecksungleichung kann nützlich sein.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum der stetigen Funktionen vom Intervall $[0,1]$ nach $\mathbb{C}$ (mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation).

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

ein (hermitesches) Skalarprodukt auf V definiert wird.

(b) Sei $f_1 \in V$ die Funktion, die konstant 1 ist (d. h. $f_1(x) = 1$ für alle $x \in [0,1]$). Geben Sie eine Funktion $f_2 \in V$ an mit $\|f_2\| = 1$ und $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$.

(c) Gibt es unendlich viele Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots \in V$, so dass $\|f_i\| = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$?

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Sei V ein unitärer Vektorraum und seien $u, v \in V$ Vektoren mit $\|u\| = \|v\|$. Zeigen Sie, dass $\langle u+v, u-v \rangle$ rein imaginär ist, d. h. von der Form ib, für $b \in \mathbb{R}$.

(b) Erklären Sie die folgende Behauptung: Wenn man in (a) annimmt, V sei ein Euklidischer Vektorraum, dann erhält man genau den Satz des Thales.
(Finden Sie, falls nötig, selbst heraus, was der Satz des Thales besagt.)

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/`

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.