....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 11

Abgabe am 13.7.2017 bis 8:30 Uhr

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei K ein Körper und seien U, V, W drei K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die Verknüpfungsabbildung $\operatorname{Hom}(U,V) \times \operatorname{Hom}(V,W) \to \operatorname{Hom}(U,W), (f,g) \mapsto g \circ f$ bilinear ist.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte):

Der Dualraum eines K-Vektorraums V wurde definiert durch $V^* := \operatorname{Hom}(V,K)$. In dieser Aufgabe definieren wir analog dazu $V_* := \operatorname{Hom}(K,V)$.

(a) Seien U und V K-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$. Definieren Sie, analog zur Definition von $f^* \in \operatorname{Hom}(V^*, U^*)$, einen Homomorphismus f_*. Liegt f_* in $\operatorname{Hom}(U_*, V_*)$ oder in $\operatorname{Hom}(V_*, U_*)$?
Zeigen Sie insbesondere, dass f_* ein Homomorphismus ist; Sie können dazu Aufgabe 1 verwenden.

(b) Seien U, V und W K-Vektorräume und seien $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ und $g \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Zeigen Sie entweder $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ (falls $f_* \in \operatorname{Hom}(U_*, V_*)$) oder $(g \circ f)_* = f_* \circ g_*$ (falls $f_* \in \operatorname{Hom}(V_*, U_*)$).

(c) Jetzt soll gezeigt werden, dass man V mit V_* und f mit f_* identifizieren kann.
Geben Sie also Isomorphismen $h_V : V \to V_*$ (für alle K-Vektorräume V) an, so dass für beliebige K-Vektorräume U, V und für beliebige $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$ entweder $h_V \circ f = f_* \circ h_U$ (falls $f_* \in \operatorname{Hom}(U_*, V_*)$) oder $f_* \circ h_V \circ f = h_U$ (falls $f_* \in \operatorname{Hom}(V_*, U_*)$) gilt.

Bemerkung: Dass man V_* mit V identifizieren kann ist der Grund dafür, dass man das üblicherweise gar nicht definiert.

Aufgabe 3 (1+2 Punkte):

(a) Wir betrachten $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt (Beispiel 6.1.3). Aus jedem Vektor $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir eine Abbildung $\alpha_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nämlich $\alpha_v(u) = \langle v, u \rangle$.
Begründen Sie, dass α_v ein Element von $(\mathbb{R}^n)^*$ ist. Welcher Zeilenvektor in $\mathbb{R}^{1\times n}$ entspricht α_v (unter der Identifikation $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^{1\times n}$)?

(b) Sei nun V ein beliebiger endlich-dimensionaler euklidischer ($\mathbb{R}$-)Vektorraum.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_V : V \to V^*$, die gegeben ist durch $f_V(v) = (u \mapsto \langle v, u \rangle)$, ein Vektorraumisomorphimus ist.

Aufgabe 4 (2+2+1+2 Punkte):

Sei K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren die *Spur* einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ als die Summe der Einträge auf der Diagonalen:[2]

$$\operatorname{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

(a) Sei jetzt außerdem $m \in \mathbb{N}$. Jeder Matrix $B \in K^{n\times m}$ ordnen wir die Abbildung $\alpha_B : K^{m\times n} \to K, C \mapsto \operatorname{tr}(BC)$ zu.
Zeigen Sie, dass die Zuordnung $B \mapsto \alpha_B$ einen Isomorphismus $K^{n\times m} \to (K^{m\times n})^*$ definiert.
Hinweis: Sie können sich z. B. überlegen, dass man sämtliche Einträge der Matrizen so in einer Zeile bzw. Spalte anordnen kann, dass die obige Zuordnung dem Isomorphismus $K^{1\times m\cdot n} \to (K^{m\cdot n})^*$ entspricht.

(b) Zeigen Sie: Ist $\chi_A = \sum_{i=0}^n b_i X^i$ das charakteristische Polynom von A, so ist $\operatorname{tr}(A) = (-1)^{n-1} \cdot b_{n-1}$.
Hinweis: Welche Summanden der Leibnizformel (Definition 5.1.1), angewandt auf $A - XI_n$, tragen zum Koeffizient b_{n-1} bei?

(c) Zeigen Sie: Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, ist $f \in \operatorname{End}(V)$ und sind A und A' Matrizen von f bezüglich zwei verschiedenen Basen von V, so ist $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A')$. (Verwenden Sie (b) und dass $\chi_A = \chi_{SAS^{-1}}$ gilt für invertierbare S.)

Man definiert dann $\operatorname{tr} : \operatorname{End}(V) \to K$ durch $\operatorname{tr}(f) := \operatorname{tr}(A)$, wobei A die Matrix von f bezüglich einer (beliebigen) Basis von V ist.

(d) Seien nun U und V endlich-dimensionale K-Vektorräume. Benutzen Sie die (c) um – in Analogie zu (a) – einen Isomorphismus $\operatorname{Hom}(U,V) \to \operatorname{Hom}(V,U)^*$ anzugeben, der nicht von einer Basiswahl abhängt.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.

[2] Die Notation „tr“ kommt vom englischen Wort „trace“.