....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 12

Abgabe am 20.7.2017 bis 8:30 Uhr

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (1+2+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ gilt: $\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\0\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}4\\5\\2\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}3\\4\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$.

(b) Zeigen Sie: Zu allen $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt es $\begin{pmatrix}a'_1\\a'_2\\a'_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b'_1\\b'_2\\b'_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a'_1\\a'_2\\a'_3\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix}b'_1\\b'_2\\b'_3\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$$

gilt und geben Sie explizite Formeln an, um die a'_j, b'_j aus den a_i, b_i zu berechnen.

(c) Gibt es zu allen $u, v \in \mathbb{R}^2$ jeweils Vektoren $u', v' \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\0\end{smallmatrix}\right) \otimes u + \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes v = \left(\begin{smallmatrix}4\\5\\2\end{smallmatrix}\right) \otimes u' + \left(\begin{smallmatrix}3\\4\\1\end{smallmatrix}\right) \otimes v'$$

gilt? Wenn ja, beschreiben Sie, wie man u', v' aus u, v erhalten kann. (Sie müssen keine explizite Formeln angeben.) Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an und begründen Sie, dass es keine u', v' gibt.

Aufgabe 2 (1+1+1+2 Punkte):

Seien $m, n \geq 1$. In der Vorlesung wurde ein Isomorphismus $h\colon (\mathbb{R}^m)^* \otimes \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n\times m}$ konstruiert, so dass $h(\alpha \otimes v)$ (für $\alpha \in (\mathbb{R}^m)^*, v \in \mathbb{R}^n$) der Homomorphismus ist, der $u \in \mathbb{R}^m$ auf $\alpha(u) \cdot v$ abbildet.

(a) Im Fall $m = 4$, $n = 3$: Bestimmen Sie $h\Big((1\ 0\ 3\ 0) \otimes \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) + (0\ 1\ 1\ 0) \otimes \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\Big)$ (als Matrix).

(b) Zeigen Sie: Sind $\alpha \in (\mathbb{R}^m)^*$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so hat die Matrix $h(\alpha \otimes v)$ den Rang höchstens 1.

(c) Zeigen Sie die Umkehrung von (b): Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix vom Rang höchstens 1, so gibt es $\alpha \in (\mathbb{R}^m)^*$ und $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $h(\alpha \otimes v) = A$ ist.
Hinweis: Benutzen Sie, dass sich die Spalten von A schreiben lassen als $r_j \cdot v'$ für ein geeignetes $v' \in \mathbb{R}^n$ und geeignete $r_j \in \mathbb{R}$.

(d) Sei $k \geq 0$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Bedingungen an Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ äquivalent sind:
  (i) A hat Rang höchstens k.
  (ii) Es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in (\mathbb{R}^m)^*$ und $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, so dass $A = h(\alpha_1 \otimes v_1 + \dots + \alpha_k \otimes v_k)$ gilt.
Hinweis: Sie können verwenden, dass für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ gilt: $\mathrm{rk}(A + B) \leq \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B$.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei K ein Körper und seien U, V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Zeigen Sie: „$\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)) = \mathrm{Hom}(U \otimes V, W)$“. Genauer: Zeigen Sie, dass man diese Vektorräume miteinenander identifizieren kann, indem man die diversen Identifikationen aus der Vorlesung (Sätze 8.4.9, 8.4.10, 8.4.11) miteinander kombiniert.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei K ein Körper und seien V_1, V_2, V_3 K-Vektorräume. Es soll gezeigt werden, dass das Tensorprodukt $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ die folgende universelle Eigenschaft besitzt:

> Ist W ein weiterer K-Vektorraum und ist $f\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$ eine multilineare Abbildung, so gibt es genau eine lineare Abbildung $h \in \mathrm{Hom}((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3, W)$, so dass
> $$h((v_1 \otimes v_2) \otimes v_3) = f(v_1, v_2, v_3) \qquad (+)$$
> gilt für alle $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Sei $\mathcal{B}_i$ eine Basis von V_i für $i = 1, 2, 3$. Definieren Sie mit Hilfe dieser Basen eine Basis von $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ und überprüfen Sie, dass die Bedingung (+) insbesondere h auf dieser Basis festlegt.
Folgern Sie daraus, dass es höchstens ein h gibt, dass die Bedingung erfüllt.

(b) Prüfen Sie: Erfüllt h die Bedingung (+) für Ihre Basis aus (a), so erfüllt h die Bedingung (+) für alle $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1]Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.