....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 3

Abgabe am 11.5.2017 bis 8:30 Uhr

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

(a) Wir betrachten $\mathbb{C}^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle = u^T \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{pmatrix} \bar{v}.$$

Geben Sie eine Orthonormalbasis zu diesem Skalarprodukt an.

(b) Sei

$$v := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Für welche n gibt es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bezüglich des Standard-Skalarprodukts, die v enthält?

(c) Sei V ein n-dimensionaler euklidischer ($\mathbb{R}$-)Vektorraum, und seien $v_1, \dots, v_{n-1}$ normierte, paarweise orthogonale Vektoren. Wie viele verschiedene Vektoren v_n gibt es, so dass $v_1, \dots, v_n$ eine Orthonormalbasis bilden? (Hängt das von V und/oder von $v_1, \dots, v_{n-1}$ ab?) Begründen Sie.
Hinweis: Bevor Sie formal losrechnen, kann es helfen, sich das anschaulich zu überlegen, z. B. in $V = \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Welche Matrizen $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, die nur 0 und 1 als Einträge haben, sind unitär? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist $|\lambda| = 1$.
(Zur Erinnerung: „λ ist ein Eigenwert von A“ bedeutet: Es gibt ein $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ so dass $Av = \lambda v$.)

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Seien V, W unitäre Vektorräume. Ein Vektorraumisomorphismus $f\colon V \to W$ wird *Isometrie* genannt, wenn für alle $v \in V$ gilt: $\|f(v)\| = \|v\|$. Zeigen Sie: Isometrien sind genau das gleiche wie Isomorphismen von unitären Vektorräumen.

Hinweis: Drücken Sie $\langle u, v\rangle$ mit Hilfe von (unter anderem) $\|u + v\|$ aus.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Welche der folgenden Aussagen über Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind wahr? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an:

(a) Sind A und B hermitesch, so ist auch AB hermitesch.

(b) Sind A und B unitär, so ist auch AB unitär.

(c) Ist A hermitesch, so ist auch A^{-1} hermitesch.

(d) Ist A unitär, so ist auch A^{-1} unitär.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.