| 1 | 2 | 3 | 4 | B[1] | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | (a) | |
| | | | | (b) | |

.................................................
Name und Matr-Nr. (a)

.................................................
Name und Matr-Nr. (b)

...........
Gruppe

# Lineare Algebra II – Blatt 5

Abgabe am 26.5.2017 bis 8:30 Uhr

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

**Aufgabe 1 (2+1 Punkte):**

(a) Welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ sind nilpotent? Geben Sie ggf. den Nilpotenzgrad an.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ an mit $\dim(\operatorname{im} A) = 4$, $\dim(\operatorname{im} A^2) = 2$, $\dim(\operatorname{im} A^3) = 1$, $A^4 = 0$.

**Aufgabe 2 (2 Punkte):**

Sei $K$ ein Körper, $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie: Ist $f$ sowohl diagonalisierbar als auch nilpotent, so ist $f$ schon die Nullabbildung.

Hinweis: Können Sie etwas über Eigenwerte eines nilpotenten Endomorphismus sagen?

**Aufgabe 3 (8 Punkte):**

Sei $K$ ein Körper. Geben Sie (für ein $n$ Ihrer Wahl) nilpotente Matrizen $A_i, B_i \in K^{n\times n}$ an, so dass

(a) $A_1 + B_1$ nicht nilpotent ist;

(b) $A_2 \cdot B_2$ nicht nilpotent ist.

Seien nun $A, B \in K^{n\times n}$ nilpotente Matrizen, die $AB = BA$ erfüllen. Zeigen Sie (für alle $n$):

(c) $A + B$ ist nilpotent.

(d) $A \cdot B$ ist nilpotent.

**Aufgabe 4 (3 Punkte):**

Sei $K$ ein Körper und sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Wenn $A^2$ nilpotent ist, ist auch $A$ nilpotent.

(b) Wenn $A$ nilpotent ist, ist auch $A^T$ nilpotent.

(c) Wenn $\ker A = \operatorname{im} A$ gilt, ist $A$ nilpotent.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.