....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 6

Abgabe am 8.6.2017 bis 8:30 Uhr

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige kommutative Ringe R und für beliebige $a, b, c \in R$ wahr?

Für die Aussagen, die wahr sind: Geben Sie einen Beweis an unter Verwendung der Definition von $a \mid b$ aus der Vorlesung. Für die Aussagen, die falsch sind: Geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an, also einen Ring R und Elemente $a, b, c \in R$, die der Aussage widersprechen.

(a) Aus $a \mid b$ und $b \mid c$ folgt $a \mid c$.

(b) Aus $a \mid c$ und $b \mid c$ folgt $(a + b) \mid c$

(c) Aus $a \mid b$ folgt $ac \mid bc$.

(d) Aus $ac \mid bc$ folgt $a \mid b$.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $X^3 + 2X^2 + 3X + 2$ und $X^4 + X^3 - 2X - 4$.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Sei K ein Körper, $p_1, p_2 \in K[X]$ zwei Polynome, V ein K-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Betrachten Sie die folgenden Behauptungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(p_1(f)) \cap \mathrm{im}(p_2(f)) &\subseteq \mathrm{im}((p_1 + p_2)(f)) \subseteq \mathrm{im}(p_1(f)) + \mathrm{im}(p_2(f)) \\ \mathrm{im}(p_1(f)) \cap \mathrm{im}(p_2(f)) &\subseteq \mathrm{im}((p_1 \cdot p_2)(f)) \subseteq \mathrm{im}(p_1(f)) + \mathrm{im}(p_2(f)) \end{aligned}$$

Finden Sie heraus, welche dieser vier Inklusionen immer wahr sind. Beweisen Sie diejenigen, die wahr sind, und geben Sie konkrete Gegenbeispiele (bestehend aus K, V, f, p_1, p_2) für die anderen an. (Begründen Sie auch, dass es sich um Gegenbeispiele handelt, wenn dies nicht offensichtlich ist.)

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Sei $A := \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{2\times 2}$. Es soll ein Polynom $f \in \mathbb{F}_5[X] \setminus \{0\}$ von kleinstmöglichem Grad gefunden werden, so dass $f(A) = 0$ gilt. Gehen Sie wie folgt vor, um ein solches Polynom zu finden:

- Bestimmen Sie sukzessiv die Potenzen A^0, A^1, A^2, ...
- Prüfen Sie, ob eine lineare Abhängigkeit zwischen diesen Potenzen besteht; eine solche lineare Abhängikeit liefert das gewünschte Polynom.

(Es gibt auch andere Verfahren, ein solches Polynom f zu finden; in dieser Aufgabe soll aber das hier angegebene Verfahren verwendet werden.)

Zur Erinnerung: $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist der Körper mit 5 Elementen.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.