1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe

Lineare Algebra II – Blatt 7

Abgabe am 14.6.2017 bis 17:00 Uhr

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

(a) Geben Sie einen Vektorraum-Homomorphismus $f\colon (\mathbb{F}_7)^3 \to (\mathbb{F}_7)^2$ an, der die folgenden beiden Eigenschaften hat (für $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_7$):

- $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ falls $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.
- $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Bei dieser Teilaufgabe brauchen Sie Ihre Antwort nicht zu begründen.

(b) Sei nun K ein beliebiger Körper, V und W K-Vektorräume, und seien $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ Untervektorräume, so dass $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ gilt. Sei außerdem $f_i \in \operatorname{Hom}(U_i, W)$ für $i = 1, \ldots, k$. Zeigen Sie, dass es genau ein $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gibt, das die Homomorphismen f_i fortsetzt, d. h. so dass für $i = 1, \ldots k$ gilt: $f|_{U_i} = f_i$.
(Erinnerung: $f|_{U_i}$ ist die Einschränkung von f auf U_i, d. h. „$f|_{U_i} = f_i$“ bedeutet, dass für alle $u \in U_i$ gilt: $f(u) = f_i(u)$.)

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$ und $p \in K[X]$ ein Polynom.

(a) Sei v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert 3. Zeigen Sie: v ist auch ein Eigenvektor von $f \circ f - f - \mathrm{id}_V$ und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(b) Zeigen Sie allgemeiner: Ist $p \in K[X]$ ein Polynom und λ ein Eigenwert von f, so ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(f)$.

(c) Zeigen Sie: Wird ein Vektor $u \in V$ von $g := f \circ f - f - \mathrm{id}_V$ auf 0 abgebildet, so wird auch $f(u)$ von g auf 0 abgebildet.

(d) Zeigen Sie allgemeiner: Ist $p \in K[X]$ ein Polynom, so ist $U := \ker p(f)$ *invariant* unter f, d. h. $f(U) \subseteq U$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Bestimmen Sie die Haupträume der $\mathbb{R}$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.

Aufgabe 4 (2+2+1 Punkte):

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$ und ψ_f das Minimalpolynom von f. Zeigen Sie:

(a) Ist ψ_f durch X teilbar, so ist f nicht invertierbar.
Hinweis: Wenn $\psi_f = X \cdot p$ ist, was lässt sich dann über $p(f)$ sagen, und was bedeutet das für $\psi_f(f)$?

(b) Ist ψ_f nicht durch X teilbar, so ist f invertierbar.
Hinweis: Zeigen Sie, dass es ein Polynom der Form $1 + Xq$ gibt (mit $q \in K[X]$), das f annulliert. Können Sie mit Hilfe dieses Polynoms das Inverse von f angeben?

(c) Ist f invertierbar, so gibt es ein Polynom $p \in K[X]$ so dass $f^{-1} = p(f)$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie die vorigen Teilaufgaben.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS17/

[1]Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.