Lineare Algebra I und II – Kurzskript

Immanuel Halupczok

Inhaltsverzeichnis

Lineare Algebra I

0 Die Sprache der Mathematik

Konvention 0.1 *„A **oder** B" bedeutet „A oder B oder beides". (Wenn beides verboten sein soll, sage das explizit.)*

Beispiel 0.2 *Jede rationale Zahl ist kleiner als 4 oder größer als 3.*

Beispiel 0.3 *"n ist eine Quadratzahl oder durch 3 teilbar.": Wahr für $n = 4$, $n = 6$, $n = 9$; nicht wahr für $n = 7$.*

Konvention 0.4 *„**Es gibt ein** XXX" bedeutet „Es gibt ein oder mehrere XXX". (Wenn mehrere XXX ausgeschlossen werden soll, sage „Es gibt genau ein XXX")*

Beispiel 0.5 *Es gibt eine ganze Zahl, deren Quadrat 9 ist. (Es gibt sogar zwei, nämlich 3 und -3.)*

Beispiel 0.6 *Es gibt genau eine ganze Zahl, deren dritte Potenz 8 ist.*

Konvention 0.7 *Buchstaben (oder andere Symbole) können als Platzhalter für mathematische Objekte (wie Zahlen) verwendet werden. So verwendete Buchstaben heißen **Variablen**.*

Beispiel 0.8 *Es gibt genau eine ganze Zahl z mit $z^3 = 8$.*

Beispiel 0.9 *Für jede rationale Zahl r gilt: $r < 4$ oder $r > 3$.*

Konvention 0.10 *„**Sei** x YYY" bedeutet: Wir nehmen im Folgenden an, dass x YYY ist. Insbesondere:*

- *„Sei x ein ZZZ" bedeutet: Wir nehmen im Folgenden an, dass x ein beliebiges ZZZ ist.*
- *„Sei x = ZZZ" bedeutet: Wir nehmen im Folgenden an, dass x den Wert ZZZ hat.*
  Oft schreibt man auch „Sei $x :=$ ZZZ" oder einfach nur „$x :=$ ZZZ".

Beispiel 0.11 *Seien a und b reelle Zahlen. Dann gilt $a + b = b + a$.*

Beispiel 0.12 *Sei n eine natürliche Zahl und sei $m := 2n$. Dann ist m durch n teilbar.*

Beispiel 0.13 *Seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen. Dann sind m und $m + n$ auch teilerfremd.*

Konvention 0.14 *„**Wenn** A **dann** B" ist gleichbedeutend mit: „B ist wahr oder A ist falsch." Man sagt auch: „A **impliziert** B" oder „Aus A **folgt** B".*

Beispiel 0.15 *Für alle reellen Zahlen x gilt: $\underbrace{\text{Wenn } x > 2 \text{ ist, dann ist } x^2 > 4.}_{(*)}$*

(Die Gesamtbehauptung ist, dass die Teilaussage $(*)$ für alle x wahr ist.)

Konvention 0.16 *„A **genau dann wenn** B" bedeutet: „Wenn A dann B und wenn B dann A". Man sagt auch: „A und B sind **äquivalent**."*

Beispiel 0.17 *Für jede natürliche Zahl n gilt: n ist durch 10 teilbar genau dann wenn die letzte Ziffer* 0 *ist.*

Notation 0.18 *Sind A und B Aussagen, so bedeutet:*

- ***Disjunktion**: „$A \vee B$“: A oder B (von: lateinisch „vel“)*
- ***Konjunktion**: „$A \wedge B$“: A und B*
- ***Negation**: „$\neg A$“: A ist falsch*
- ***Implikation**: „$A \Rightarrow B$“ oder „$A \Leftarrow B$“: wenn A dann B*
- *„$A \iff B$“: A genau dann wenn B*
- ***All-Quantor**: „$\forall x\colon A$“: Für alle x gilt A*
- ***Existenz-Quantor**: „$\exists x\colon A$“: Es gibt ein x so dass A gilt.*

Beispiel 0.19 *Ist A die Aussage „Jede natürliche Zahl ist durch x teilbar“, so besagt $\neg A$: „Es gibt eine natürliche Zahl, die nicht durch x teilbar ist.“*

Konvention 0.20 *Klammerung und Bindungsstärke:*

- *Verwende nur runde Klammern zum klammern.*
- *„$\cdot$“ bindet stärker als „$+$“ und „$-$“ („Punkt vor Strich“)*
- *$\wedge$ bindet stärker als $\vee$, und $\neg$ bindet noch stärker.*
- *$\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\iff$ binden schwächer als $\vee$, und mehrere in einer Reihe haben eine spezielle Bedeutung: $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ bedeutet: A impliziert B und B impliziert C.*

1 Mathematische Grundbegriffe

1.1 Mengen

Definition 1.1.1 *Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von mathematischen Objekten, die **Elemente** von M genannt werden. Für „x ist ein Element von M“ sagen wir auch „M **enthält** x“ oder „x **liegt in** M“; Notation dafür: $x \in M$. Für „x liegt nicht in M“ schreibt man: $x \notin M$.*

Eine Menge wird dadurch charakterisiert, welche Elemente sie enthält, d. h. zwei Mengen M, N sind gleich ($M = N$) genau dann wenn für alle mathematischen Objekte x gilt: $x \in M \iff x \in N$.

Eine Menge kann auch nur ein Element oder gar kein Element haben. Eine Menge mit nur einem Element x wird nicht *als das gleiche angesehen wie x selbst.*

Mengen werden selbst wieder als mathematische Objekte angesehen und können deshalb Elemente von (anderen) Mengen sein.

Notation 1.1.2 *Ist n eine natürliche Zahl und sind $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ beliebige mathematische Objekte, so schreiben wir $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ für die Menge, die diese Objekte (und keine anderen) enthält. Die **leere Menge** $\{\}$ (d. h. die Menge, die keine Elemente hat), wird auch mit $\varnothing$ bezeichnet.*

Konvention 0.21 *Als Variable kann man auch einen Buchstaben mit einem mathematischen Objekt als Index verwenden; für jeden Index wird dies als eigene Variable angesehen.*

Beispiel 0.22 *$x, x_1, x_2, x_3, x_{\frac{1}{2}}$ sind lauter verschiedene Variablen.*

Beispiel 1.1.3 *$x \in \{1, 4, 6\}$ genau dann wenn $x = 1$ oder $x = 4$ oder $x = 6$.*

Beispiel 1.1.4 *$x \in \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ genau dann wenn $x = 1$ oder $x = 2$ oder $\ldots$ oder $x = 7$.*

Konvention 1.1.5 *„Die Menge der XXX" bedeutet: die Menge, die alle XXX enthält (und sonst nichts).*

Beispiel 1.1.6 *Die Menge der **natürlichen Zahlen** (inklusive 0): $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$*

Beispiel 1.1.7 *Die Menge der **ganzen Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \quad -1, -2, -3, \ldots\}$*

Beispiel 1.1.8 *Die Menge der **rationalen Zahlen**: $\mathbb{Q}$*

Beispiel 1.1.9 *Die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$*

Konvention 0.23 *Sei M eine Menge.*
„$\forall x \in M\colon \ldots$" bedeutet: „Für alle Elemente von M gilt $\ldots$"
„$\exists x \in M\colon \ldots$" bedeutet: „Es gibt ein (mindestens) Element von M, für das $\ldots$ gilt."

Notation 1.1.10 *Ist A eine Aussage über eine Variable x, so bezeichnet $\{x \mid A\}$ die Menge, der Objekte, für die A gilt.*

Ist außerdem M eine Menge, so bezeichnet $\{x \in M \mid A\}$ die Menge der Objekte, die in M liegen und für die A gilt.

Ist C ein Ausdruck in einer Variablen x und A eine Aussage über x, so bezeichnet $\{C \mid A\}$ die Menge der Werte, die der Ausdruck annimmt, wenn man für x Objekte einsetzt, auf die A zutrifft.

Beispiel 1.1.11 *Die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen: $\mathbb{R}_{\geqslant 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.*

Beispiel 1.1.12 *$\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ist die Menge der Quadratzahlen.*

Definition 1.1.13 *Eine Menge A heißt **endlich**, wenn sich A schreiben lässt als $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ für eine natürliche Zahl n und für Objekte $x_1, \ldots, x_n$. Ist A endlich, so bezeichnet "$\#A$" für die Anzahl der Elemente von A („die **Kardinalität** von A"). Ist A nicht endlich, so nennt man A **unendlich** und schreibt $\#A = \infty$.*

Beispiel 1.1.14 *$\#\varnothing = 0$; $\#\mathbb{N} = \infty$.*

Definition 1.1.15 *Seien A und B Mengen. A heißt **Teilmenge** von B wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man sagt auch: „A ist eine **Untermenge** von B"; oder: „B ist eine **Obermenge** von A". Notation: $A \subset B$.*

Beispiel 1.1.16 *$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

Beispiel 1.1.17 *Für jede Menge M gilt: $\varnothing \subset M$.*

Definition 1.1.18 *Ist A eine Menge, so bezeichnet*

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \text{ Menge}, B \subset A\}$$

*die Menge aller Teilmengen von A; $\mathcal{P}(A)$ wird **Potenzmenge** von A genannt.*

Beispiel 1.1.19 $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Definition 1.1.20 *Seien A und B Mengen.*

(a) *Der **Schnitt** von A und B ist $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ („A **geschnitten** B“).*

(b) *Die **Vereinigung** von A und B ist $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ („A **vereinigt** B“).*

(c) *Die **Differenz** von A und B ist $A \backslash B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ („A **ohne** B“).*

Satz 1.1.21 *Für beliebige Mengen A, B und C gelten die folgenden **Distributivgesetze**:*

(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Definition 1.1.22 *Ist I eine Menge, und ist A_i eine Menge für jedes $i \in I$, so schreibt man:*
Die Vereinigung aller A_i:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I \colon x \in A_i\}$$

Der Schnitt aller A_i:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I \colon x \in A_i\}$$

Ist $I = \{m, m+1, \ldots, n\}$ für zwei ganze Zahlen m, n, so schreibt man auch

$$\bigcup_{i=m}^{n} A_i \quad \textit{bzw.} \quad \bigcap_{i=m}^{n} A_i.$$

Definition 1.1.23 *Sind $x_1, \ldots, x_n$ mathematische Objekte, so führt man ein neues Objekt ein: das n-**Tupel** $(x_1, \ldots, x_n)$. Zwei n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ sind genau dann gleich, wenn gilt:*

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n.$$

*Ein **Paar** ist ein 2-Tupel, ein **Tripel** ist ein 3-Tupel, etc.*

*Das **kartesische Produkt** von Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist die Menge*

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}.$$

Ist $A_i = A$ für alle i, so schreibt man auch A^n statt $A_1 \times \cdots \times A_n$.

1.2 Abbildungen

Definition 1.2.1 *Seien A und B Mengen. Eine **Abbildung** f (oder **Funktion**) von A nach B ist gegeben durch eine Menge $G \subset A \times B$, für die gilt: Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.*

*Falls $(a, b) \in G$, setzt man $f(a) := b$, und man sagt, f **bildet** a auf b **ab**.*

"Abb(A, B)" bezeichnet die Menge aller Abbildungen von A nach B. Statt „$f \in \mathrm{Abb}(A, B)$" schreibt man auch „$f\colon A \to B$", und statt $f(a) = b$ schreibt man auch „$f\colon a \mapsto b$".

*Man nennt A den **Definitionsbereich** von f, B den **Wertebereich** und G den **Graph**.*

Beispiel 1.2.2 *Die **Identität** auf einer Menge A ist $\mathrm{id}_A\colon A \to A, a \mapsto a$.*

Definition 1.2.3 *Seien A, B, C Mengen und seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann ist die **Verknüpfung** von f und g die Abbildung*

$$g \circ f\colon A \to C, a \mapsto g(f(a)).$$

*„$g \circ f$" spricht man oft „g **nach** f" aus.*

Definition 1.2.4 *Seien A und B Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*
(a) *Ist $A' \subset A$, so ist $f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\}$ das **Bild von** A' **unter** f.*
(b) *Das **Bild** von f ist $\operatorname{im} f := f(A)$.*
(c) *Ist $B' \subset B$, so ist $f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ das **Urbild von** B' **unter** f.*

Nachträge:
- Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $A' \subseteq A$ eine Teilmenge, so schreiben wir $f|_{A'}$ für die **Einschränkung** von f auf A', d. h. $f|_{A'}\colon A' \to B, a \mapsto f(a)$.
- Ist A eine Menge, $f\colon A \to A$ eine Abbildung, und $k \in \mathbb{N}$, so setzen wir $f^k := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ mal}}$ falls $k \geqslant 1$, und $f^0 = \mathrm{id}_A$.

Definition 1.2.5 *Seien A und B Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*
(a) *f heißt **injektiv** („f ist eine **Injektion**"), wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(\{b\})) \leqslant 1$*
(b) *f heißt **surjektiv** („f ist eine **Surjektion**"), wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(\{b\})) \geqslant 1$.*
(c) *f heißt **bijektiv** („f ist eine **Bijektion**"), wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(\{b\})) = 1$.*

Satz und Definition 1.2.6 *Ist $f\colon A \to B$ eine bijektive Abbildung, so gibt es genau eine Funktion $g\colon B \to A$, so dass gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$; g heißt „**Inverses** von f" (oder „**Umkehrabbildung** von f") und wird f^{-1} notiert.*

Definition 1.2.7 *Ist I eine Menge und ist A_i eine Menge für jedes $i \in I$, so ist das **kartesische Produkt** wie folgt definiert:*

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I\colon f(i) \in A_i\}.$$

Ist $x_i \in A_i$ für alle $i \in I$, so schreibt man $(x_i)_{i \in I}$ für die Funktion in $\prod_{i \in I} A_i$, die i auf x_i abbildet.

1.3 Partitionen und Äquivalenzrelationen

Definition 1.3.1 *Eine **Partition** einer Menge A ist eine Menge P von nichtleeren Teilmengen von A, so dass es für jedes $a \in A$ genau ein $B \in P$ gibt mit $a \in B$.*

Definition 1.3.2 *Eine **Relation** ® auf einer Menge A ist gegeben durch eine Menge $G \subset A \times A$. Notation: a ® b bedeutet $(a, b) \in G$.*

Satz und Definition 1.3.3 *Sei P eine Partition einer Menge A und sei $\sim_P$ die folgende Relation:*

$$a \sim_P a' \iff \exists B \in P \colon (a \in B \wedge a' \in B).$$

Diese Relation hat folgende Eigenschaften:
(a) $\forall a \in A \colon a \sim a$ *(**Reflexivität**)*
(b) $\forall a, b \in A \colon (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$ *(**Symmetrie**)*
(c) $\forall a, b, c \in A \colon (a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c)$ *(**Transitivität**)*
*Eine Relation mit den Eigenschaften (a)–(c) nennt man **Äquivalenzrelation**.*

Satz und Definition 1.3.4 *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, so gibt es genau eine Partition P von A so dass $a \sim a' \iff a \sim_P a'$.*

*Diese Partition P nennt man „**Quotient** von A durch $\sim$“ oder „A **modulo** $\sim$“. Notation dafür (für P): $A/\sim$.*

*Ist $a \in B \in A/\sim$, so nennt man B die **Äquivalenzklasse** von a.*

2 Algebraische Grundbegriffe

2.1 Gruppen

Satz und Definition 2.1.1 (a) *Eine **Halbgruppe** ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $\circ \colon G \times G \to G$ („**Verknüpfung**“), die folgende Eigenschaft hat: Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (**Assoziativität**).*
(b) *Ein **neutrales Element** einer Halbgruppe G ist ein Element $e \in G$ für das gilt: $\forall a \in G \colon a \circ e = e \circ a = a$.*
(c) *Wenn ein neutrales Element existiert, ist es eindeutig.*
(d) *Ist G eine Halbgruppe mit neutralem Element e und ist $a \in G$ beliebig, so heißt ein Element $b \in G$ **Inverses** von a, wenn gilt: $a \circ b = b \circ a = e$.*
(e) *Wenn a ein Inverses hat, so ist es eindeutig.*
(f) *Eine Halbgruppe mit neutralem Element, bei der jedes Element ein Inverses hat, heißt **Gruppe**.*
(g) *Eine Halbgruppe oder Gruppe G heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn gilt: $\forall a, b \in G \colon a \circ b = b \circ a$.*
(Man sagt auch: „$(G, \circ)$ ist eine (Halb)gruppe.“)

Notation 2.1.2 *Typische Notationen für Gruppen:*
Verknüpfung: $a \circ b$, neutrales Element: e; Inverses: a^{-1}
*Verknüpfung: $a \cdot b$ (oder ab), neutrales Element: 1; Inverses: a^{-1} (**multiplikative Notation**)*
*Verknüpfung: $a + b$, neutrales Element: 0; Inverses: $-a$ (**additive Notation**).*

Beispiel 2.1.3 *$\mathbb{Q}^\times$ bezeichnet die Gruppe $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ mit Multiplikation als Verknüpfung.*

$\mathbb{R}^\times$ bezeichnet die Gruppe $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit Multiplikation als Verknüpfung.

Beispiel 2.1.4 *Für $n \in \mathbb{N}$ ist die* ***symmetrische Gruppe***

$$S_n := \{f \in \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}, \{1, \ldots, n\}) \mid f \text{ ist Bijektion}\},$$

mit der Verknüpfung von Abbildungen als Verknüpfung. Die Elemente von S_n werden auch ***Permutationen*** *(der Menge $\{1, \ldots, n\}$) genannt.*

Beispiel 2.1.5 *Sind $(G, \circ)$ und $(H, \circ)$ Gruppen, so ist auch $G \times H$ eine Gruppe, mit der Verknüpfung*

$$(g, h) \circ (g', h') = (g \circ g', h \circ h').$$

Definition 2.1.6 *Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Eine* ***Untergruppe*** *von G ist eine Teilmenge $H \subset G$, so dass $(H, \circ)$ eine Gruppe ist.*

Satz und Definition 2.1.7 *Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe.*

(a) *Dann ist $\{a + H \mid a \in G\}$ eine Partition von G. Notation für diese Partition: G/H. (Ausgesprochen: „G* ***modulo*** *H"; man nennt G/H auch* ***Quotientengruppe****.)*

(b) *Sind $B, B' \in G/H$ so ist auch $B + B' \in G/H$; mit dieser Verknüpfung ist G/H eine Gruppe.*

Definition 2.1.8 *Seien $(G, \circ)$ und $(H, \vartriangle)$ Gruppen. Eine Abbildung $f\colon G \to H$ heißt* ***Gruppenhomomorphismus****, wenn gilt:*

$$\forall a, b \in G\colon f(a \circ b) = f(a) \vartriangle f(b).$$

$\mathrm{Hom}(G, H)$ bezeichnet die Menge aller Gruppenhomomorphimen von G nach H.

Ein ***Gruppenisomorphismus*** *ist ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.*

Beispiel 2.1.9 *Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe.*

(a) *$H \to G, h \mapsto h$ ist ein Gruppenhomomorphismus.*

(b) *Ist G abelsch, so ist $G \to G/H, a \mapsto a + H$ ein Gruppenhomomorphismus.*

Diese Abbildungen nennt man ***kanonische Abbildungen****.*

Satz 2.1.10 *Sind $f\colon G \to H$ und $g\colon H \to K$ Gruppenhomomorphismen, so ist auch $g \circ f$ ein Gruppenhomomorphismus.*

Definition 2.1.11 *Der* ***Kern*** *eines Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$ ist $\ker f := \{a \in G \mid f(a) = e\}$.*

Satz 2.1.12 *Ist $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\ker f$ eine Untergruppe von G und $\mathrm{im}\, f$ eine Untergruppe von H.*

Satz 2.1.13 (Homomorphiesatz für abelsche Gruppen) *Sind G und H abelsche Gruppen und ist $f\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gibt es genau einen Isomorphismus $g\colon G/\ker f \to \mathrm{im}\, f$, so dass die Verknüpfung der Abbildungen*

$$G \overset{\mathrm{kan}}{\to} G/\ker f \overset{g}{\to} \mathrm{im}\, f \overset{\mathrm{kan}}{\to} H$$

gleich f ist. (Hierbei sind kan *jeweils die kanonischen Abbildungen.)*

Definition 2.1.14 *Sei $f \in S_n$ (siehe 2.1.4). Die* ***Fehlstände*** *von f sind*

$$F_f := \{\{a, b\} \subset \{1, \dots, n\} \mid a < b \wedge f(a) > f(b)\}.$$

Das ***Signum*** *von f ist $\operatorname{sgn}(f) := (-1)^{\# F_f}$.*

Satz 2.1.15 $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{1, -1\}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Notation 0.24 *Sei $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ eine endliche Menge. Sind die a_i Elemente einer Halbgruppe $(G, +)$ für jedes $i \in I$, so schreibt man:*

$$\sum_{i \in I} a_i := a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}$$

Sind die a_i Elemente einer Halbgruppe $(G, \cdot)$ für jedes $i \in I$, so schreibt man:

$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_n}$$

Ist I leer, so setzt man $\sum_{i \in I} a_i := 0$ bzw. $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Ist $I = \{m, m+1, \dots, n\}$ für ganze Zahlen m und n, so schreibt man auch

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i$$

2.2 Ringe und Körper

Definition 2.2.1 *Ein* ***Ring*** *ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+\colon R \times R \to R$ und $\cdot\colon R \times R \to R$, so dass Folgendes gilt:*

(a) *$(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe.*

(b) *$(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.*

(c) $\forall a, b, c \in R\colon \big((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \;\; \wedge \;\; a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\big)$ *(**Distributivität**)*

Ein Ring heißt ***unitär****, wenn $(R, \cdot)$ ein neutrales Element besitzt. Ein Ring heißt* ***kommutativ****, wenn $(R, \cdot)$ abelsch ist. Ein* ***Körper*** *ist ein kommutativer Ring K, bei dem $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe ist. Ist K ein Körper, so setzt man $K^\times := K \backslash \{0\}$.*

Bemerkung 2.2.2 *Ist K ein Körper, so gilt für alle $x, y \in K$:*

(a) $0 \cdot x = 0$

(b) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

(c) *Wenn $xy = 0$ ist, dann ist $x = 0$ oder $y = 0$.*

Beispiel 2.2.3 *Ist $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 1$, so ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein Ring mit der Addition und Multiplikation, die von $\mathbb{Z}$ induziert wird, d. h. wenn $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, a \mapsto \bar{a}$ die kanonische Abbildung ist, setzt man $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$ und $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$.*

Satz 2.2.4 *Ist p eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper. Dieser Körper wird mit $\mathbb{F}_p$ bezeichnet.*

2.3 Die komplexen Zahlen

Satz und Definition 2.3.1 *Die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ sind wie folgt definiert:* $(\mathbb{C}, +) = (\mathbb{R}^2, +)$*; für* $(a,b), (c,d) \in \mathbb{C}$ *definiere* $(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$*. Mit diesen Verknüpfungen ist* $\mathbb{C}$ *ein Körper.*

Notation 2.3.2 *Wir fassen* $\mathbb{R}$ *als Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *auf, indem wir* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $(a, 0) \in \mathbb{C}$ *identifizieren. (Diese Identifikation ist mit Addition und Multiplikation kompatibel.) Das Element* $(0, 1)$ *in* $\mathbb{C}$ *wird mit* i *bezeichnet. So lässt sich jedes Element* $(a, b) \in \mathbb{C}$ *schreiben als* $a + bi$ *(für* $a, b \in \mathbb{R}$*).*

Definition 2.3.3 *Sei* $z = a + ib \in \mathbb{C}$*.*

(a) *Der **Realteil** von* z *ist* a*, der **Imaginärteil** ist* b*.*

(b) *Das **(komplex) Konjugierte** von* z *ist* $\bar{z} := a - ib$*. Der **Betrag** von* z *ist* $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$*.*

Satz 2.3.4 *Für* $z, z' \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(a) $\bar{\bar{z}} = z$

(b) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.

(c) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

(d) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

(e) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

2.4 Polynomringe

Im Folgenden sei R ein unitärer, kommutativer Ring.

Satz und Definition 2.4.1 *Ein Polynom über* R *ist ein Tupel* $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \prod_{i \in \mathbb{N}} R$*, für das gilt: Es gibt ein* $n \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $i > n$ *gilt:* $a_i = 0$*.*

Sind $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *und* $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *Polynome, so definiert man*

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

und

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \cdot (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := (c_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad \text{wobei } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

Die Menge aller Polynome über R *ist mit dieser Addition und Multiplikation ein Ring (unitär, kommutativ), der **Polynomring** über* R*.*

Notation 2.4.2 *Der Polynomring über* R *wird mit* $R[x]$ *bezeichnet, wobei* x *ein (neu eingeführtes) Symbol für das Polynom* $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ *ist.*

Der Ring R *wird als Teilmenge von* $R[x]$ *aufgefasst, indem* $a \in R$ *mit dem Polynom* $(a, 0, 0, 0, \dots)$ *identifiziert wird. (Dies ist mit Addition und Multiplikation kompatibel.)*

Insbesondere lässt sich ein Polynom $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ *schreiben als* $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$*.*

Definition 2.4.3 *Sei* $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x]$ *ein Polynom über* R *(wobei* $a_0, \dots, a_n \in R$*).*

(a) *Ist* $a_n \neq 0$*, so ist* n *der* ***Grad*** *von* f *(Notation:* $\deg f$*) und* a_n *der* ***Leitkoeffizient*** *von* f*. Ist* $a_n = 1$*, so nennt man* f ***normiert****. Man definiert* $\deg 0 = -1$*. Ist* $\deg f \leqslant 0$*, so nennt man* f ***konstant****. Ist* $\deg f \leqslant 1$*, so nennt man* f ***linear****.*

(b) *Das Polynom* f *definiert eine Funktion von* R *nach* R*, die auch mit* f *bezeichnet wird:* $f(b) := a_0 + a_1 b + \cdots + a_n b^n$ *für* $b \in R$

(c) *Eine* ***Nullstelle*** *von* f *ist ein Element* $b \in R$ *mit* $f(b) = 0$*.*

Im Folgenden sei K ein Körper.

Bemerkung 2.4.4 *Sind* $f, g \in K[x]$*, beide ungleich* 0*, so ist* $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$*.*

Satz 2.4.5 (Polynomdivision) *Sind* $f, g \in K[x]$ *Polynome mit* $\deg g \geqslant 2$*, so gibt es Polynome* $h, r \in K[x]$ *mit*

$$f = g \cdot h + r$$

und $\deg r < \deg g$*.*

Bemerkung 2.4.6 *Ist* R *ein kommutativer, unitärer Ring, sind* $f, g \in R[x]$ *und ist* $a \in R$*, so gilt:* $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ *und* $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$*.*

Satz 2.4.7 *Ist* $f \in K[x]$*,* $f \neq 0$ *und ist* b *eine Nullstelle von* f*, so gibt es ein* $g \in K[x]$ *mit* $f = (x - b) \cdot g$*.*

Korollar 2.4.8 *Ist* $f \in K[x]$*,* $f \neq 0$*, so hat* f *maximal* $\deg f$ *verschiedene Nullstellen.*

Satz 2.4.9 (Fundamentalsatz der Algebra) *Ist* $f \in \mathbb{C}[x]$ *und* $\deg f \geqslant 1$*, so besitzt* f *eine Nullstelle.*

Korollar 2.4.10 *Ist* $f \in \mathbb{C}[x]$*,* $f \neq 0$*, so gibt es* $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ *so dass* $f = a \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - b_i)$*; hierbei ist* $n = \deg f$*.*

3 Vektorräume

3.1 Definition

Im Folgenden sei K ein Körper.

Definition 3.1.1 *Ein* ***Vektorraum*** *über* K *(auch: ein* K***-Vektorraum****) ist eine abelsche Gruppe* $(V, +)$*, zusammen mit einer Verknüpfung* $\cdot \colon K \times V \to V$*, so dass für alle* $r, s \in K$ *und alle* $u, v \in V$ *gilt:*

(a) $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$

(b) $(r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$

(c) $(r \cdot s) \cdot v = r \cdot (s \cdot v)$

(d) $1 \cdot v = v$

Die Elemente von V *nennt man* ***Vektoren****, die Elemente von* K ***Skalare****;* $+$ *heißt* ***Vektoraddition****,* $\cdot$ *heißt* ***Skalarmultiplikation****. Das Element* $0 \in V$ *nennt man* ***Nullvektor****.*

Beispiel 3.1.2 *K^n ist ein Vektorraum mit der Skalarmultiplikation*

$$r \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (ra_1, \ldots, ra_n).$$

Elementе von K^n werden oft $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ geschrieben (statt $(a_1, \ldots, a_n)$).

Satz 3.1.3 *Ist V ein K-Vektorraum, so gilt für alle $r \in K$ und alle $v \in V$:*
(a) $r \cdot v = 0 \iff (r = 0 \vee v = 0)$
(b) $(-1) \cdot v = -v$.

Satz und Definition 3.1.4 *Sind U und V K-Vektorräume, so ist $U \times V$ ein K-Vektorraum mit der Skalarmultiplikation $r \cdot (u, v) = (ru, rv)$ für $r \in K$, $u \in U$, $v \in V$. Man nennt $U \times V$ die **direkte Summe** von U und V und schreibt auch $U \oplus V$ dafür.*

3.2 Untervektorräume

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 3.2.1 *Ein **Untervektorraum** eines K-Vektorraums V ist eine Teilmenge $U \subset V$, die mit der gleichen Vektoraddition und der gleichen Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bildet.*

Satz 3.2.2 *Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V ist ein Untervektorraum genau dann, wenn U nicht leer ist und U abgeschlossen ist unter Vektoraddition und unter Skalarmultiplikation.*

Definition 3.2.3 *Sei V ein Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_m, w \in V$. Man nennt w eine **Linearkombination** von $v_1, \ldots, v_m$, wenn es $a_1, \ldots, a_m \in K$ gibt mit $w = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$. Hier ist $m = 0$ auch erlaubt: Der Nullvektor ist Linearkombination vom „leeren Tupel".*

Definition 3.2.4 *Ist V ein K-Vektorraum und $A \subset V$ eine beliebige Teilmenge, so definiert man $\langle A \rangle_K$ als die Menge aller Vektoren $w \in V$, die sich als Linearkombination von (jeweils endlich vielen) Vektoren aus A schreiben lassen. (Ist A leer, so ist $\langle A \rangle_K = \{0\}$.) Man nennt $\langle A \rangle_K$ die **lineare Hülle** (oder den **Span** oder das **Erzeugnis**) von A; Ist $U = \langle A \rangle_K$, so sagt man auch „A **erzeugt** U" oder „A ist ein **Erzeugendensystem** von U".*

Andere Notationen: $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K := \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle_K$ und $\langle (v_i)_{i \in I} \rangle_K := \langle (\{v_i \mid i \in I\} \rangle_K$ für Vektoren $v_i \in V$.

Satz 3.2.5 *Ist $A \subset V$ für einen K-Vektorraum V, so ist $\langle A \rangle_K$ „der kleinste Untervektorraum von V, der A (als Teilmenge) enthält", d. h. $\langle A \rangle_K$ ist ein Untervektorraum von V, und jeder Untervektorraum $U \subset V$, der A enthält, enthält auch $\langle A \rangle_K$.*

Satz 3.2.6 *Ist V ein K-Vektorraum und sind U, U' Untervektorräume von V, so ist $U \cap U'$ auch ein Untervektorraum von V.*

Satz und Definition 3.2.7 *Ist V ein K-Vektorraum und sind U, U' Untervektorräume von V, so setzt man*

$$U + U' := \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}.$$

Es gilt: $U + U' = \langle U \cup U' \rangle_K$; insbesondere ist $U + U'$ ein Untervektorraum von V.

Satz und Definition 3.2.8 *Ist V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist die abelsche Gruppe V/U auch ein K-Vektorraum mit der Skalarmultiplikation $r \cdot (v + U) = rv + U$. Man spricht das „V **modulo** U“ aus und nennt V/U auch einen **Quotienten-(vektor-)raum**.*

3.3 Lineare Unabhängigkeit

Sei weiterhin K ein Körper, und sei außerdem V ein K-Vektorraum.

Definition 3.3.1 *Ein Tupel $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren heißt **linear unabhängig**, wenn es keine echte Teilmenge $I' \subsetneq I$ gibt mit $\langle (v_i)_{i \in I'} \rangle_K = \langle (v_i)_{i \in I} \rangle_K$. (Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ so sagt man auch: „Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig“.)*

*Eine Teilmenge $A \subset V$ heißt **linear unabhängig**, wenn es keine echte Teilmenge $A' \subsetneq A$ gibt mit $\langle A' \rangle_K = \langle A \rangle_K$.*

*„**Linear abhängig**“ bedeutet: nicht linear unabhängig.*

Satz 3.3.2 (a) *Vektoren $v_1, \ldots, v_m \in V$ sind linear abhängig genau dann wenn es $r_1, \ldots, r_m \in K$ gibt so dass mindestens ein $r_i \neq 0$ ist aber $\sum_{i=1}^m r_i v_i = 0$. (So eine Summe nennt man eine **lineare Abhängigkeit**.)*

Sei jetzt $A \subset V$ eine Menge von Vektoren.

(b) *Ist A linear unabhängig, so ist auch jede Teilmenge $A' \subset A$ linear unabhängig.*

(c) *Ist A linear abhängig, so gibt es eine endliche Teilmenge $A_0 \subset A$, die linear abhängig ist.*

*Insbesondere: A ist linear abhängig genau dann wenn es eine endliche, nicht leere Teilmenge $A_0 \subset A$ gibt und Skalare $r_v \in K^\times$ für $v \in A_0$ mit $\sum_{v \in A_0} r_v \cdot v = 0$. (Auch diese Summe nennt man eine **lineare Abhängigkeit**.)*

Satz 3.3.3 *Ist $A \subset V$ linear unabhängig und $v \in V \backslash \langle A \rangle_K$, so ist auch $A \cup \{v\}$ linear unabhängig.*

3.4 Basis und Dimension

Sei weiterhin K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Definition 3.4.1 *Ein Tupel $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren $v_i \in V$ nennt man **Basis** von V, wenn es linear unabhängig ist und V erzeugt. Analog für Mengen: Eine Teilmenge $A \subset V$ nennt man **Basis** von V, wenn sie linear unabhängig ist und V erzeugt.*

Beispiel 3.4.2 *In K^n bilden die Vektoren*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*eine Basis, die **Standardbasis**.*

Satz 3.4.3 *Sei $A \subset V$. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist eine Basis von V.*

(b) *A ist ein minimales Erzeugendensystem von V, d. h.: A erzeugt V aber keine echte Teilmenge $A' \subsetneq A$ erzeugt V.*

(c) *A ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V, d. h.: A ist linear unabhängig, aber jede echte Obermenge $A' \supsetneq A$ ist linear abhängig.*

(d) *Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombintation von Vektoren aus A schreiben, d. h. es gibt genau eine endliche Teilmenge $A_0 \subset A$ und eindeutig bestimmte $r_w \in K^\times$ für $w \in A_0$ so dass*

$$v = \sum_{w \in A_0} r_w \cdot w$$

ist. (A_0 darf leer sein, nämlich wenn $v = 0$.)

Satz 3.4.4 (Basisergänzungssatz) *Ist A eine linear unabhängige Teilmenge von V, so gibt es eine Basis A' von V, mit $A' \supset A$. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis.*

Definition 3.4.5 *Eine Menge $\mathcal{K}$ von Mengen heißt **Kette**, wenn für beliebige $A, A' \in \mathcal{K}$ gilt: $A \subset A'$ oder $A' \subset A$.*

Satz 3.4.6 (Variante des Zornschen Lemmas) *Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Menge von Teilmengen mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$\mathcal{T}$ ist nicht leer.*

(b) *Für jede nicht-leere Kette $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{A \in \mathcal{K}} A \in \mathcal{T}$.*

Dann gibt es eine Menge $A_0 \in \mathcal{T}$, so dass keine echte Obermenge $A \supsetneq A_0$ in $\mathcal{T}$ liegt.

Satz 3.4.7 *Alle Basen von V haben die gleiche Kardinalität.*

Satz 3.4.8 (Steinitzscher Austauschsatz) *Ist A eine Basis von V und sind $w_1, \ldots, w_n \in V$ linear unabhängig, so gibt es eine Teilmenge $B \subset A$ mit $\#(A \backslash B) = n$ so dass $B \cup \{w_1, \ldots, w_n\}$ auch eine Basis von V ist.*

Definition 3.4.9 *Die **Dimension** „$\dim V$" von V ist die Kardinalität einer (beliebigen) Basis von V. Ist $\dim V = n$, so sagt man auch „V ist n-dimensional". V heißt **endlich dimensional** falls $\dim V \in \mathbb{N}$ und **unendlich dimensional** falls $\dim V = \infty$.*

Satz 3.4.10 *Sei V endlich dimensional und sei $A \subset V$ mit $\#A = \dim V$. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist linear unabhängig.*
(b) *A erzeugt V.*
(c) *A ist eine Basis von V.*

Satz 3.4.11 *Sind $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume, so gilt:* $\dim(U + U') + \dim(U \cap U') = \dim U + \dim U'$ *(wobei wir setzen: $\infty + a := \infty$ für beliebige $a \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).*

Satz 3.4.12 *Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so gilt* $\dim V = \dim U + \dim V/U$. *Insbesondere ist* $\dim U \leqslant \dim V$.

4 Lineare Abbildungen und Matritzen

4.1 Lineare Abbildungen

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 4.1.1 *Seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt* ***lineare Abbildung*** *oder* ***(Vektorraum-)Homomorphismus*** *wenn für alle $v, v' \in V$ und alle $r \in K$ gilt:*
(a) *$f(v + v') = f(v) + f(v')$ (d. h. f ist ein Gruppenhomomorphismus)*
(b) *$f(rv) = rf(v)$.*
Ist f außerdem bijektiv, so nennt man f einen ***(Vektorraum-)Isomorphismus****. Die Menge aller Vektorraum-Homomorphismen von V nach W wird mit* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *bezeichnet.*

Beispiel 4.1.2 *Ist V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum, so sind die kanonischen Abbildungen $U \to V$ und $V \to V/U$ (siehe Beispiel 2.1.9) lineare Abbildungen.*

Beispiel 4.1.3 *Ist V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so ist*

$$K^n \to V, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Satz 4.1.4 *Sind V und W K-Vektorräume, ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und sind $(w_i)_{i \in I}$ beliebige Vektoren in W, so gibt es genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$, die v_i auf w_i abbildet für jedes $i \in I$.*

Satz 4.1.5 *Seien U, V und W K-Vektorräume und $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen. Dann gilt:*
(a) *$g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$.*
(b) *Ist f ein Isomorphismus, so ist auch f^{-1} ein Vektorraum-Isomorphismus (also insbesondere linear).*
(c) *Der Kern $\ker f$ ist ein Untervektorraum von U (vgl. Definition 2.1.11).*
(d) *Das Bild $\operatorname{im} f$ ist ein Untervektorraum von V (vgl. Definition 1.2.4).*
(e) *Für $u, u' \in U$ gilt: $f(u) = f(u') \iff u - u' \in \ker f$.*
(f) *Für $A \subset U$ gilt: $f(\langle A \rangle_K) = \langle f(A) \rangle_K$.*

Bemerkung 4.1.6 *Ein Isomorphismus $f\colon V \to W$ erhält alle „strukturellen Eigenschaften“. Z. B. gilt für $A \subset V$: A ist linear unabhängig / ein Erzeugendensystem von V / eine Basis von V genau dann wenn $f(A)$ linear unabhängig / ein Erzeugendensystem von W / eine Basis von W ist.*

Satz 4.1.7 (Homomorphiesatz für Vektorräume) *Sind V und W K-Vektorräume und ist $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, so gibt es genau einen Vektorraum-Isomorphismus $g\colon V/\ker f \to \operatorname{im} f$, so dass die Verknüpfung der Abbildungen*

$$V \overset{\mathrm{kan}}{\to} V/\ker f \overset{g}{\to} \operatorname{im} f \overset{\mathrm{kan}}{\to} W$$

gleich f ist. (Hierbei sind kan *jeweils die kanonischen Abbildungen.)*

Definition 4.1.8 *Der **Rang** einer linearen Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ist $\operatorname{rk} f := \dim(V/\ker(f)) = \dim(\operatorname{im}(f))$.*

Bemerkung: Aus Bemerkung 4.1.6 folgt auch: „Verknüpfen mit Isomorphismen ändert den Rang nicht“, d. h. für lineare Abbildungen $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und Isomorphismen $g \in \operatorname{Hom}(V', V)$ und $h \in \operatorname{Hom}(W, W')$ gilt: $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk}(h \circ f \circ g)$.

Satz 4.1.9 *Sind U, V und W K-Vektorräume und $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen, so gilt:*

(a) $\operatorname{rk} f \leqslant \min\{\dim U, \dim V\}$
(b) $\dim U = \operatorname{rk} f + \dim\ker f$
(c) $\operatorname{rk}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rk} g, \operatorname{rk} f\}$
(d) $\operatorname{rk}(f) + \operatorname{rk}(g) \leqslant \operatorname{rk}(g \circ f) + \dim V$ *(**Sylvesters Rang-Ungleichung**)*

Korollar 4.1.10 *Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann gilt:*

(a) *Ist $\dim V = \dim W$, so ist f surjektiv genau dann wenn f injektiv ist.*
(b) *Ist $\dim V > \dim W$, dann ist f nicht injektiv.*
(c) *Ist $\dim V < \dim W$, dann ist f nicht surjektiv.*

Satz 4.1.11 *Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $\dim V = m, \dim W = n$ und $\operatorname{rk} f = k$. Dann gibt es Basen $v_1, \ldots, v_m$ von V und $w_1, \ldots, w_n$ von W so dass gilt: $f(v_i) = w_i$ falls $i \leqslant k$; $f(v_i) = 0$ falls $i > k$.*

Bemerkung 4.1.12 *Sind V und W K-Vektorräume, so ist auch $\operatorname{Hom}(V, W)$ ein K-Vektorraum mit **punktweiser Vektor-Addition** und **punktweiser Skalarmultiplikation**: Für $f, g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $r \in K$ setze $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$.*

4.2 Matrizen

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 4.2.1 *Seien $m, n \geqslant 1$ natürliche Zahlen. Eine $m \times n$-**Matrix** über K ist ein $m \cdot n$-Tupel A von Elementen aus K, dessen Einträge mit Paaren (i, j) für $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$ indiziert sind. Notation:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}.$$

(Hierbei ist der Index „ij“ eine Kurzschreibweise für „i, j“ und bedeutet nicht *$i \cdot j$.) Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K wird mit $K^{m\times n}$ bezeichnet und auf übliche Weise als K-Vektorraum aufgefasst (d. h. mit komponentenweiser Vektoraddition und Skalarmultiplikation). Die Matrix, deren Einträge alle 0 sind, heißt* ***Nullmatrix*** *(und wird wie üblich selbst mit 0 bezeichnet).*

Satz und Definition 4.2.2 *Wir identifizieren eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit der Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, die gegeben ist durch*

$$f(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_i \end{pmatrix}.$$

Notation, für $v \in K^n$: $Av := f(v)$. Diese Identifikation ist eine Bijektion zwischen den Mengen $K^{m\times n}$ und $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$.

Definition 4.2.3 *Seien $A \in K^{\ell\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$.*

(a) *Das Produkt $A \cdot B$ ist die Matrix, die zur Verknüpfung $A \circ B \colon K^n \to K^\ell$ gehört (**Matrix-Multiplikation**).*

(b) *Der **Rang** $\operatorname{rk} A$ ist der Rang der zu A gehörigen Abbildung $K^n \to K^m$.*

Satz 4.2.4 *Das Produkt von Matrizen $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant \ell, 1\leqslant j\leqslant m} \in K^{\ell\times m}$ und $B = (b_{jk})_{1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n} \in K^{m\times n}$ ist die Matrix $C = (c_{ik})_{1\leqslant i\leqslant \ell, 1\leqslant k\leqslant n} \in K^{\ell\times n}$, die gegeben ist durch:*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jk}$$

Definition 4.2.5 *Die **Einheitsmatrix** $I_n \in K^{n\times n}$ ist die Matrix, die der Identitätsabbildung $K^n \to K^n$ entspricht:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **invertierbar**, wenn die zugehörige Abbildung bijektiv ist; die Matrix zur inversen Abbildung wird mit A^{-1} bezeichnet und heißt **inverse Matrix**.*

Satz 4.2.6 *$K^{n\times n}$ ist mit der Matrixmultiplikation ein unitärer Ring; I_n ist das neutrale Element der Multiplikation.*

Satz 4.2.7 *Zu jeder Matrix $A \in K^{m\times n}$ gibt es invertierbare Matrizen $S \in K^{m\times m}$ und $T \in K^{n\times n}$ so dass*

$$SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Anzahl der 1en gleich $\operatorname{rk} A$ ist.

4.3 Lineare Gleichungssysteme

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 4.3.1 *Ist $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n} \in K^{m\times n}$ und $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in K^m$, und ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Tupel von Variablen (**Unbekannte**), so nennt man*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

*ein **lineares Gleichungssystem**. Kürzere Schreibweise: $Ax = b$. Eine **Lösung** von „$Ax = b$“ ist ein $c = (c_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$, für das $Ac = b$ gilt.*

*Ein **homogenes lineares Gleichungssystem** ist ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$.*

Satz 4.3.2 *Die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ für $A \in K^{m\times n}$ ist ein Untervektorraum U von K^n mit $\dim U = n - \operatorname{rk} A$; insbesondere gibt es, wenn $n > m$ ist (d. h. wenn es mehr Unbekannte als Gleichungen gibt), immer nicht-triviale Lösungen, d. h. Lösungen $\neq (0, \ldots, 0)$.*

Satz 4.3.3 *Ist c eine beliebige Lösung eines (inhomogenen) Gleichungssystems $Ax = b$ so hat die Menge aller Lösungen die Form $\{c + d \mid Ad = 0\}$.*

Definition 4.3.4 *Ist $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ und $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, so ist die **erweiterte Matrix** zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ die $m\times(n+1)$-Matrix*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Definition 4.3.5 ***Elementare Umformungen** eines linearen Gleichungssystems sind:*

(a) *zwei Gleichungen vertauschen;*
(b) *eine Gleichung mit einem Skalar $r \in K^\times$ multiplizieren;*
(c) *zu einer Gleichung ein Vielfaches einer anderen Gleichung addieren.*

Satz und Definition 4.3.6 *Einer elementare Umformung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ entspricht, die erweiterte Matrix $(A|b)$ durch $E(A|b)$ zu ersetzen, wobei $E = (e_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ eine der folgenden **Elementarmatrizen** ist:*

(a) *Gleichungen k und ℓ vertauschen (für $1 \leqslant k, \ell \leqslant m$, $k \neq \ell$): $e_{ii} = 1$ falls $i \neq k, \ell$; $e_{k\ell} = e_{\ell k} = 1$; alle anderen e_{ij} sind 0;*
(b) *Gleichung k mit $r \in K^\times$ multiplizieren ($1 \leqslant k \leqslant m$): $e_{ii} = 1$ falls $i \neq k$ $e_{kk} = r$; alle anderen e_{ij} sind 0;*
(c) *das r-fache von Gleichung k zu Gleichung ℓ addieren (für $r \in K$ und $1 \leqslant k, \ell \leqslant m$, $k \neq \ell$): $e_{ii} = 1$; $e_{\ell k} = r$; alle anderen e_{ij} sind 0.*

Bemerkung: Es gilt allgemeiner, für das Produkt AB von Matrizen $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant \ell, 1\leqslant j\leqslant m} \in K^{\ell\times m}$ und $B = (b_{jk})_{1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n} \in K^{m\times n}$: Die i-te Zeile von A beschreibt, wie man die i-te Zeile des Produkts aus den Zeilen von B berechnet, nämlich:

$$(i\text{-te Zeile von } AB) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot(j\text{-te Zeile von } B)$$

Satz 4.3.7 *Elementare Umformungen eines linearen Gleichungssystems ändern die Lösungsmenge nicht.*

Satz 4.3.8 (Gauß-Algorithmus) *Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch elementare Umformungen in* ***Zeilenstufenform*** *bringen, d. h. in die Form*

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * \cdots & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{array}\right);$$

und sogar in ***Normalform:***

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & 0 & * & \cdots & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{array}\right).$$

Hierbei stehen die „$*$“ für beliege Skalare. Die eingekästelten 1en (d. h. die ersten nicht-0-Einträge der Zeilen) nennt man ***Pivot-Elemente****.*

Satz 4.3.9 *Sei $(A|b)$ ein linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform mit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ und $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. Die Lösungsmenge ist leer, wenn es eine Zeile der Form $(0\cdots 0|b_i)$ gibt mit $b_i \neq 0$. Ansonsten ist die Lösungsmenge die Menge der $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ mit folgenden Bedingungen an x_j für $1\leqslant j\leqslant n$:*

(a) *Enhält die j-te Spalte kein Pivot-Element, so ist x_j beliebig.*

(b) *Enhält die j-te Spalte ein Pivot-Element $a_{ij} = 1$, so wird x_j durch die i-te Zeile festgelegt: $x_j = b_i - \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik}x_k$.*

Bemerkung: Ist $(A|b)$ sogar in Normalform, so kommen in den Summen in (b) nur diejenigen x_j vor, die beliebig gewählt werden können.

Satz 4.3.10 *Ist $A \in K^{n\times n}$ und bringt man die erweiterte Matrix $(A|I_n)$ in Normalform $(A'|B')$, so gilt: A ist invertierbar genau dann wenn $A' = I_n$; ist dies der Fall, so ist $B' = A^{-1}$.*

Definition 4.3.11 *Sei $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n} \in K^{m\times n}$. Seien $v_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ die Spaltenvektoren von A und $w_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ die Zeilenvektoren. Der **Spaltenrang** von A ist $\dim\langle v_1, \ldots, v_n\rangle_K$; der **Zeilenrang** von A ist $\dim\langle w_1, \ldots, w_n\rangle_K$.*

Satz 4.3.12 *Für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt: Zeilenrang = Spaltenrang = Rang.*

Definition 4.3.13 *Die **Transponierte** einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n} \in K^{m\times n}$ ist die Matrix $A^T := (a_{ji})_{1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m} \in K^{n\times m}$.*

Satz 4.3.14 *Für beliebige Matrizen A, B gilt:*
(a) $(A^T)^T = A$
(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ *(falls A, B beides $m \times n$-Matrizen sind)*
(c) $(AB)^T = B^T A^T$ *(falls A eine $\ell \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix ist)*

Bemerkung: Es gilt auch: A ist invertierbar genau dann wenn A^T invertierbar ist, und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bemerkung 4.3.15 *Ist $A \in K^{m\times n}$ beliebig und ist $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix, so ergibt sich AE aus A auf eine der folgenden Arten (wobei die Fälle denen von 4.3.6 entsprechen):*
(a) *zwei Spalten vertauschen*
(b) *eine Spalte mit einem Skalar $\neq 0$ multiplizieren*
(c) *das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte addieren.*

4.4 Arbeiten mit Basen

Sei weiterhin K ein Körper.

Notation 4.4.1 (a) *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_m)$. Wir schreiben $\psi_\mathcal{B}\colon K^m \to V$ für den Isomorphismus aus Beispiel 4.1.3, d. h. $\psi_\mathcal{B}(e_i) = v_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$, und für $v \in V$ setzen wir ${}_\mathcal{B}[v] := \psi_\mathcal{B}^{-1}(v) \in K^m$ (d. h. $v = a_1v_1 + \ldots a_mv_m$ genau dann wenn ${}_\mathcal{B}[v] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$).*

(b) *Sei nun W ein weitere K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_n)$, und sei $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$. Wir setzen ${}_\mathcal{B}[f]_\mathcal{C} := \psi_\mathcal{B}^{-1} \circ f \circ \psi_\mathcal{C} \in K^{m\times n}$; d. h. ist $f(w_j) = a_1v_1 + \ldots a_mv_m$, so ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ die j-te Spalte von ${}_\mathcal{B}[f]_\mathcal{C}$.*

Satz 4.4.2 *Seien U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$.*
(a) *Für $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$ und $w \in W$ gilt: ${}_\mathcal{B}[f(w)] = {}_\mathcal{B}[f]_\mathcal{C} \cdot {}_\mathcal{C}[w]$*
(b) *Für lineare Abbildungen $W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} U$ gilt ${}_\mathcal{A}[g \circ f]_\mathcal{C} = {}_\mathcal{A}[g]_\mathcal{B} \cdot {}_\mathcal{B}[f]_\mathcal{C}$*

(c) *Ist* $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_m')$ *eine weitere Basis von* V *so gilt für* $v \in V$*:* ${}_{\mathcal{B}}[v] = {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'} \cdot {}_{\mathcal{B}'}[v]$*, und* ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}$ *ist die Matrix mit den Spalten* ${}_{\mathcal{B}}[v_1']$*, …,* ${}_{\mathcal{B}}[v_m']$*.*

5 Endomorphismen

Im ganzen Kapitel sei weiterhin K ein Körper.

Definition 5.0.1 *Sei* V *ein* K*-Vektorraum. Eine lineare Abbildung von* V *in sich selbst nennt man auch einen* ***Endomorphismus*** *von* V*. Man setzt* $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$*.*

5.1 Determinanten

Zur Erinnerung: S_n ist die symmetrische Gruppe (Beispiel 2.1.4) und $\mathrm{sgn}(\sigma)$ das Signum von $\sigma \in S_n$ (Definition 2.1.14).

Definition 5.1.1 *Die* ***Determinante*** *einer Matrix* $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in K^{n \times n}$ *ist definiert durch die* ***Leibniz-Formel****:*

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Beispiel 5.1.2 *Es gilt:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

und

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Satz 5.1.3 *Für* $A \in K^{n \times n}$ *gilt:* $\det(A^T) = \det A$*.*

Notation 5.1.4 *Sind* $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$*, so schreiben wir*

$$(v_1 \mid \cdots \mid v_n) := (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in K^{m \times n}$$

für die Matrix, die $v_1, \ldots, v_n$ *als Spalten hat.*

Satz 5.1.5 *Die Determinante ist die einzige Abbildung* $K^{n \times n} \to K$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\det$ *ist* ***multilinear****, d. h. für alle* $j = 1, \ldots, n$ *und alle (fest gewählten)* $v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n \in K^n$ *ist die Abbildung*

$$K^n \to K, w \mapsto \det(v_1 \mid \cdots \mid v_{j-1} \mid w \mid v_{j+1} \mid \cdots \mid v_n)$$

linear.

(b) $\det$ *ist* ***alternierend****, d. h. falls* $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ *und es* $j \neq k$ *gibt mit* $v_j = v_k$*, dann ist* $\det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) = 0$.

(c) $\det$ *ist* ***normiert****, d. h.* $\det(I_n) = 1$.

Außerdem gilt:

(d) *Für* $v_1, \ldots, v_n \in K^n$ *und* $1 \leqslant j < k \leqslant n$ *gilt:*

$$\det(v_1 \mid \cdots \mid v_{j-1} \mid v_k \mid v_{j+1} \mid \cdots \mid v_{k-1} \mid v_j \mid v_{k+1} \mid \cdots \mid v_n) = -\det(v_1 \mid \cdots \mid v_n).$$

(e) $\det A = 0$ *genau dann wenn* A *nicht invertierbar ist (d. h.* $\det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) = 0$ *genau dann wenn* $v_1, \ldots, v_n$ *linear abhängig sind).*

Lemma 5.1.6 *Ist* $A \in K^{n\times n}$ *beliebig und* $E \in K^{n\times n}$ *eine Elementarmatrix, so gilt* $\det(AE) = \det A \cdot \det E$*: Zwei Spalten tauschen multipliziert die Determinante mit* -1*, das Vielfache einer Spalte zu einer anderen addieren ändert die Determinante nicht, und eine Spalte mit einem Faktor* $r \in K^\times$ *multiplizieren ändert auch die Determinante um den Faktor* r*. Entsprechendes gilt für Zeilentransformationen.*

Satz 5.1.7 *Für Matrizen der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gilt: $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Satz 5.1.8 *Für* $A, B \in K^{n\times n}$ *gilt:*

(a) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(b) *Falls* A *invertierbar ist, gilt* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Definition 5.1.9 *Ist* V *ein endlich-dimensionaler* K*-Vektorraum,* $f \in \operatorname{End}(V)$ *ein Endomorphismus und* $\mathcal{B}$ *eine Basis von* V*, so setzen wir* $\det f := \det {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$

Satz 5.1.10 *In Definition 5.1.9 hängt* $\det f$ *nicht von der Wahl von* $\mathcal{B}$ *ab.*

Satz 5.1.11 (Laplacescher Entwicklungssatz) *Sei* $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in K^{n\times n}$*. Im Folgenden seien* $1 \leqslant k, l \leqslant n$*. Wir schreiben* $A_{(k,l)}$ *für die* $(n-1)\times(n-1)$*-Matrix, die man aus* A *erhält, indem man die* k*-te Zeile und die* l*-te Spalte rausstreicht.*

(a) *Für jedes* ℓ *gilt:* $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \cdot a_{k\ell} \cdot \det A_{(k,\ell)}$.

(b) *Für jedes* k *gilt:* $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \cdot a_{k\ell} \cdot \det A_{(k,\ell)}$.

5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.2.1 (a) *Zwei Matrizen* $A, A' \in K^{n\times n}$ *heißen* ***ähnlich****, wenn es eine invertierbare Matrix* $S \in K^{n\times n}$ *gibt mit* $A' = S^{-1}AS$.

(b) *Eine Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

für $a_{11}, \ldots, a_{nn} \in K$ *heißt* ***Diagonalmatrix****.*

(c) *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.*
*Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Definition 5.2.2 *Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von f wenn es einen Vektor $v \in V\backslash\{0\}$ gibt mit $f(v) = \lambda v$. In diesem Fall nennt man v **Eigenvektor** von f (zum Eigenwert λ).*

*Der **Eigenraum** zum Eigenwert λ ist $\{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$.*

Bemerkung 5.2.3 *Eigenräume sind Unterveektorräume von V.*

Bemerkung 5.2.4 *Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.*

Satz 5.2.5 *Sei V ein Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ Eigenvektoren von f zu verschiedenen Eigenwerten, so sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig.*

Definition 5.2.6 *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Das **charakteristische Polynom** von f ist das Polynom $\chi_f := \det(f - x\,\mathrm{id}_V) \in K[x]$. (Formal gesehen wählen wir eine Basis $\mathcal{B}$ von V, betrachten ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} - xI_n$ als Matrix mit Einträgen im Ring $K[x]$ und wenden darauf die Leibniz-Formel an, wobei wir im Ring $K[x]$ arbeiten.)*

Satz 5.2.7 *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Die Eigenwerte von f sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_f .*

Bemerkung 5.2.8 *Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ hat Grad n, und schreibt man es in der Form*

$$\chi_A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

so ist $a_0 = \det A$ und $a_n = (-1)^n$.

Satz 5.2.9 *Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:*
(a) *A ist diagonalisierbar.*
(b) *Es gibt eine Basis von $K^{n\times n}$ aus Eigenvektoren von A.*
(c) *Die Summe der Dimensionen der Eigenräume ist n.*

6 Euklidische und unitäre Vektorräume

6.1 Reelle Skalarprodukte

Definition 6.1.1 *Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.*
(a) *Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, so dass für jedes $v \in V$ die beiden Abbildungen $V \to K$, $u \mapsto \beta(u, v)$ und $V \to K$, $u \mapsto \beta(v, u)$ linear sind.*
(b) *Eine Bilinearform β heißt **symmetrisch**, wenn für alle $u, v \in V$ gilt: $\beta(u, v) = \beta(v, u)$.*

Ab jetzt nehmen wir $K = \mathbb{R}$ an.

(c) *Eine Bilinearform β heißt **positiv definit**, wenn für alle $v \in V \backslash \{0\}$ gilt: $\beta(v,v) > 0$.*

(d) *Ein **(reelles) Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt** auf V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V. Für Skalarprodukte verwendet man oft die Notation $\langle u, v\rangle := \beta(u,v)$.*

Definition 6.1.2 (a) *Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*

(b) *Ist V ein euklidischer Vektorraum, so ist die **Norm** eines Vektors $v \in V$ definiert durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Beispiel 6.1.3 *Das **Standard-Skalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$ ist*

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Wenn man Vektoren als Matrizen mit einer Spalte auffasst, lässt sich dies auch kürzer schreiben:

$$\langle u, v\rangle = u^T v.$$

Verwendet man dieses Standard-Skalarprodukt, so ist die Norm eines Vektors

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Satz 6.1.4 *Sei V ein euklidischer Vektorraum, seien $u, v \in V$ und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\|v\| \geqslant 0$

(b) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(c) $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$

(d) $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$ *(**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**), und Gleichheit gilt genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.*

(e) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ *(**Minkowski-Ungleichung** oder **Dreiecksungleichung**)*

Satz 6.1.5 *Sei K ein Körper und sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \{\textit{Bilinearformen auf } K^n\} &\to K^{n\times n} \\ \beta &\mapsto (\beta(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion; das Inverse dieser Abbildung ist

$$\begin{aligned} K^{n\times n} &\to \{\textit{Bilinearformen auf } K^n\} \\ A &\mapsto \beta_A, \quad \textit{wobei } \beta_A(u,v) := u^T A v \quad \textit{für } u, v \in K^n. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

(a) *β_A ist symmetrisch genau dann wenn $A = A^T$. (Solche Matritzen A nennt man **symmetrisch**.)*

(b) *Ist $K = \mathbb{R}$, so ist β_A positiv definit genau dann wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $v^T A v > 0$. (Solche Matritzen A nennt man **positiv definit**.)*

Die Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ sind also genau die Abbildungen der Form $\langle u, v\rangle = u^T A v$ für symmetrische, positiv definite Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Bemerkung 6.1.6 *Allgemeiner gilt, in euklidischen Vektorräumen V:*

(a) *Ist $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist $\beta_f(u, v) := \langle u, f(v)\rangle$ eine Bilinearform auf V; dies definiert eine Bijektion zwischen $\mathrm{End}(V)$ und den Bilinearformen auf V.*

(b) *$\beta_f(u, v)$ ist symmetrisch genau dann wenn $\langle u, f(v)\rangle = \langle f(u), v\rangle$. Einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$, der dies erfüllt, nennt man **selbstadjungiert**.*

6.2 Orthonormalbasen

Im Folgenden sei V ein euklidischer Vektorraum.

Definition 6.2.1 (a) *Ein Vektor $v \in V$ heißt **normiert**, wenn $\|v\| = 1$.*

(b) *Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal** (zueinander), wenn $\langle u, v\rangle = 0$ ist. Man scheibt $u \perp v$.*

Definition 6.2.2 *Eine **Orthonormalbasis** von V ist eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *v_i ist normiert für alle $i \in I$.*

(b) *$v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.*

Satz 6.2.3 *Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V.*

(a) *Für beliebige $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i\rangle v_i$; anders ausgedrückt:*

$$_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix} \langle v, v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n\rangle \end{pmatrix}.$$

(b) *Für beliebige $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w\rangle = ({}_{\mathcal{B}}[v])^T {}_{\mathcal{B}}[w]$.*

Satz 6.2.4 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung) *Jeder endlich dimensionale euklidische Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis. Genauer: Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine beliebige Basis von V, so gibt es eine Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_n$ von V, so dass $\langle w_1, \ldots, w_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \ldots, v_i\rangle_{\mathbb{R}}$ für alle $i \leqslant n$.*

Bemerkung: Sätze 6.2.4 und 6.2.3 zusammen besagen also insbesondere: Für jeden endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V gibt es einen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to V$, so dass das Skalarprodukt auf V dem Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ entspricht.

6.3 Orthogonale Transformationen

Definition 6.3.1 *Sei V ein euklidischer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **orthogonale Transformation** von V, wenn f ein Isomorphismus ist und für alle u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

*Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **orthogonal**, wenn sie eine orthogonale Transformation von $\mathbb{R}^n$ ist, wobei wir $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standard-Skalarprodukt auffassen.*

Satz 6.3.2 *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind äquivalent:*

(a) *A ist orthogonal.*

(b) *A ist invertierbar und $A^T = A^{-1}$.*

(c) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis.*

Satz 6.3.3 (Hauptachsentransformation) *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch genau dann wenn es eine orthogonale Matrix S gibt, so dass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.*

Bemerkung 6.3.4 *Da $S^T = S^{-1}$ ist eine solche Matrix A auch diagonalisierbar, und die Einträge auf der Diagonalen von $S^T AS$ sind die Eigenwerte von A.*

Lineare Algebra II

6.4 Hermitesche Skalarprodukte

Definition 6.4.1 *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein* ***(hermitesches) Skalarprodukt*** *auf V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{C}, (u,v) \mapsto \langle u, v\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für jedes $v \in V$ ist die Abbildung $u \mapsto \langle u, v\rangle$ linear.*

(b) *Für alle $u, v \in V$ gilt: $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, wobei $\bar{a}$ das komplex Konjugierte von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet; siehe Definition 2.3.3.*

(c) *Für alle $v \in V\backslash\{0\}$ ist $\langle v, v\rangle$ eine reelle Zahl größer als 0.*

Einen $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt nennt man ***unitären Vektorraum****.*

Ist V ein unitärer Vektorraum, so definiert man die ***Norm*** *eines Vektors $v \in V$ durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Bemerkung 6.4.2 *Ein Skalarprodukt auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum ist* ***schieflinear*** *im zweiten Argument, d. h. Für $u, v, v' \in V$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $\langle u, v + v'\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, v'\rangle$ und $\langle u, zv\rangle = \bar{z}\langle u, v\rangle$.*

Beispiel 6.4.3 *Das* ***Standard-Skalarprodukt*** *auf $\mathbb{C}^n$ ist*

$$\langle u, v\rangle = u^T \bar{v},$$

wobei $\bar{v}$ der Vektor ist, den man aus v erhält, indem man alle Einträge komplex konjugiert.

Satz 6.4.4 *Sei V ein unitärer Vektorraum, seien $u, v \in V$ und sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) $\|v\| \geqslant 0$

(b) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(c) $\|zv\| = |z| \cdot \|v\|$

(d) $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$ *(****Cauchy-Schwarz-Ungleichung****), und Gleichheit gilt genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.*

(e) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ *(****Dreiecksungleichung****)*

Definition 6.4.5 (a) *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt* ***hermitesch****, wenn $A^T = \bar{A}$ gilt. Hierbei ist $\bar{A}$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man alle Einträge komplex konjugiert.*

(b) *Eine hermitesche Matrix heißt* ***positiv definit****, wenn für alle $v \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ gilt: $v^T A\bar{v}$ ist eine reelle Zahl größer als 0.*

Bemerkung: Dass $v^T A\bar{v}$ eine reelle Zahl ist, folgt schon daraus, dass A hermitesch ist.

Satz 6.4.6 *Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine positiv definite hermitesche Matrix, so ist*

$$\langle u, v\rangle := u^T A\bar{v}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, und jedes Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ hat diese Form, für eine eindeutige Matrix A.

Satz 6.4.7 *Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt:*

(a) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$

(b) *Ist A invertierbar, so ist $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$*

(c) $(\bar{A})^T = \overline{A^T}$

Hierbei ist $\bar{A}$ die Matrix, die man aus A erhält, indem man alle Einträge komplex konjugiert.

Bemerkung 6.4.8 *Ist V ein unitärer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist U mit dem gleichen Skalarprodukt auch ein unitärer Vektorraum.*

6.5 Orthogonalität und Orthonormalbasen

Im folgenden sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V (ensprechend) ein euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 6.5.1 (a) *Ein Vektor $v \in V$ heißt* ***normiert****, wenn $\|v\| = 1$.*

(b) *Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen* ***orthogonal*** *(zueinander), wenn $\langle u, v\rangle = 0$ ist. Man scheibt $u \perp v$.*

(c) *Das* ***orthogonale Komplement*** *eines Untervektorraums $U \subseteq V$ ist*

$$U^{\perp} := \{v \in V \mid \forall u \in U : v \perp u\}.$$

Für Vektoren $u \in V$ setzt man $u^{\perp} = \langle u\rangle_{\mathbb{K}}^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp u\}$.

Satz 6.5.2 *Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:*

(a) *$U^{\perp}$ ist auch ein Untervektorraum von V, und es gilt $U \cap U^{\perp} = \{0\}$.*

(b) $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$.

Ist V endlich-dimensional, so gilt außerdem:

(c) *$U + U^{\perp} = V$; insbesondere ist $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$, und jeder Vektor $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als $v = u + u'$ mit $u \in U, u' \in U^{\perp}$. (Also, unter Verwendung von Konvention 7.3.5: $U \oplus U^{\perp} = V$.)*

(d) $U = (U^{\perp})^{\perp}$

Definition 6.5.3 *Eine* ***Orthonormalbasis*** *von V ist eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ bestehend aus normierten, paarweise orthogonalen Vektoren. („Paarweise orthogonal" bedeutet: Für jedes Paar v_i, v_j von Basisvektoren mit $i \neq j$ gilt: $v_i \perp v_j$.)*

Satz 6.5.4 *Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V. Für beliebige $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$.*

Satz 6.5.5 *Sei V endlich dimensional, und seien $v_1, \dots, v_k$ normierte, paarweise orthogonale Vektoren. Dann lassen sich $v_1, \dots, v_k$ zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen. Insbesondere besitzt jeder endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Vektorraum eine Orthonormalbasis.*

6.6 Unitäre Transformationen

Definition 6.6.1 *Seien V, W unitäre Vektorräume.*

(a) *Ein* ***Isomorphismus von unitären Vektorräumen*** *ist ein Vektorraum-Isomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, der das Skalarprodukt erhält, d. h. so dass für alle $v, v' \in V$ gilt: $\langle v, v'\rangle = \langle f(v), f(v')\rangle$.*

(b) *Eine **unitäre Transformation** ist ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$, der ein Isomorphismus von unitären Vektorräumen ist.*
(c) *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt **unitär**, wenn sie eine unitäre Transformation von $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt ist.*

Bemerkung 6.6.2 *Ist $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$ ein Isomorphismus von unitären Vektorräumen, so gilt:*
(a) *Für alle $v \in V$ ist $\|f(v)\| = \|v\|$. (Man sagt, f ist eine **Isometrie**.)*
(b) *Für alle $v, v' \in V$ gilt: $v \perp v' \iff f(v) \perp f(v')$.*
(c) *Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist $f(U^\perp) = f(U)^\perp$.*

Satz 6.6.3 *Seien V, W endlich-dimensionale unitäre Vektorräume, sei $f \in \operatorname{Hom}(V,W)$, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V. Dann ist f ein Isomorphismus von unitären Vektorräumen genau dann, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ist eine Orthonormalbasis von W ist.*

Aus Satz 6.5.5 folgt also: Ist V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum, so gibt es einen Isomorphismus von unitären Vektorräumen $V \to \mathbb{C}^n$, wobei wir auf $\mathbb{C}^n$ das Standard-Skalarprodukt verwenden und wobei $n = \dim V$ ist.

Satz 6.6.4 *Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind äquivalent:*
(a) *A ist unitär.*
(b) *A ist invertierbar und $A^T = \bar{A}^{-1}$.*
(c) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis.*

Lemma 6.6.5 *Sei K ein beliebiger Körper und seien $A, B \in K^{n\times n}$ Matrizen, so dass $e_i^T A e_j = e_i^T B e_j$ gilt für alle $i, j \leqslant n$. Dann ist $A = B$.*

Satz 6.6.6 (Hauptachsentransformation) *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist hermitesch genau dann wenn es eine unitäre Matrix S gibt, so dass $\bar{S}^T A S$ eine Diagonalmatrix mit reellen Einträgen ist.*

Definition 6.6.7 *Sei V ein unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ heißt **selbstadjungiert**, wenn für alle $u, v \in V$ gilt: $\langle u, f(v)\rangle = \langle f(u), v\rangle$.*

Bemerkung 6.6.8 *Ist $V = \mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt, so ist f selbstadjungiert genau dann wenn die zugehörige Matrix hermitesch ist.*

Bemerkung 6.6.9 *Sei V ein unitärer Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und gilt $\langle v_i, f(v_j)\rangle = \langle f(v_i), v_j\rangle$, so ist f selbstadjungiert.*

Satz 6.6.10 (Hauptachsentransformation für selbstadjungierte Endomorphismen) *Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ ist selbstadjungiert genau dann, wenn es eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von V aus Eigenvektoren von f gibt und alle Eigenwerte von f reell sind.*

Satz 6.6.11 *Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind.*

7 Die Jordansche Normalform

7.1 Nilpotente Endomorphismen

Im Folgenden sei K ein beliebiger Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 7.1.1 *Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt* ***nilpotent****, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f^k = 0$ ist. Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt* ***nilpotent****, wenn sie als Endomorphismus von K^n nilpotent ist, d. h. wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A^k = 0$ ist. Das kleinste solche k heißt* ***Nilpotenzgrad*** *(auch:* ***Nilpotenzindex****) von f bzw. A.*

Satz 7.1.2 *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent, und sei $k \in \mathbb{N}$ der Nilpotenzgrad von f. Setze $U_\ell := \ker(f^\ell)$ und $W_\ell := \mathrm{im}(f^\ell)$ für $\ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U_{k-1} \subsetneq U_k = V$$

$$V = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \cdots \supsetneq W_{k-1} \supsetneq W_k = \{0\}.$$

Satz 7.1.3 *Sind $A, B \in K^{n\times n}$ ähnliche Matrizen (siehe Definition 5.2.1), so gilt für alle $\ell \in \mathbb{N}$: $\dim \mathrm{im}\, A^\ell = \dim \mathrm{im}\, B^\ell$ und $\dim \ker A^\ell = \dim \ker B^\ell$. Insbesondere ist A nilpotent genau dann wenn B nilpotent ist.*

Satz 7.1.4 (Jordansche Normalform von nilpotenten Matrizen) *Ist $A \in K^{n\times n}$ nilpotent, so gibt es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$, so dass $S^{-1}AS$ die Form*

$$\begin{pmatrix} \left.\boxed{\begin{matrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&1\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{matrix}}\right\}\lambda_1\times\lambda_1 & & & \Large 0 \\ & \left.\boxed{\begin{matrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&1\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{matrix}}\right\}\lambda_2\times\lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & \left.\boxed{\begin{matrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&1\\ 0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{matrix}}\right\} \end{pmatrix} \lambda_\ell\times\lambda_\ell$$

hat für $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \geqslant 1$. Hierbei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ bis auf Reihenfolge durch A eindeutig bestimmt.

7.2 Teilbarkeit von Polynomen

Definition 7.2.1 *Sei R ein kommutativer Ring und seien $a, b \in R$. Man sagt „a* ***teilt*** *b“ oder „a ist ein* ***Teiler*** *von b“ oder „b ist ein* ***Vielfaches*** *von a“ wenn es ein $a' \in R$ gibt mit $b = a \cdot a'$. Notation dafür: „$a \mid b$“.*

Im Folgenden sei K ein Körper.

Bemerkung 7.2.2 *Seien $p_1, p_2 \in K[X]$.*
(a) *Aus $p_1 \mid p_2$ folgt $\deg p_1 \leqslant \deg p_2$.*
(b) *Die Polynome $p_1, p_2 \in K[X]$ haben die selben Teiler genau dann, wenn sie sich um einen Faktor aus $K^\times$ unterscheiden.*

Bemerkung 7.2.3 *Sei $p \in K[x]$ und $a \in K$. Nach Satz 2.4.7 hat p eine Nullstelle bei a genau dann wenn $(X - a) \mid p$.*

Erinnerung: Ein Polynom $\sum_{i=1}^n a_i X^n \in K[X]$ heißt **normiert**, wenn $a_n = 1$ ist. Außerdem verwenden wir im Folgenden die Konvention, dass das 0-Polynom normiert ist.

Bemerkung 7.2.4 *Zu jedem Polynom $p \in K[X]$ gibt es genau ein normiertes Polynom p', das die selben Teiler wie p hat.*

Satz und Definition 7.2.5 *Seien $p_1, p_2 \in K[X]$ Polynome.*
(a) *Es gibt genau ein normiertes Polynom $q \in K[X]$, so dass die Teiler von q genau die Polynome sind, die sowohl Teiler von p_1 als auch Teiler von p_2 sind. Dieses q nennt man den* ***größten gemeinsamen Teiler*** *von p_1 und p_2, und man schreibt $\operatorname{ggT}(p_1, p_2)$ dafür.*
(b) *Es gibt Polynome $q_1, q_2 \in K[X]$, so dass $\operatorname{ggT}(p_1, p_2) = q_1 p_1 + q_2 p_2$ ist.*

Bemerkung 7.2.6 *Bemerkung: $\operatorname{ggT}(p_1, p_2)$ ist das (eindeutige) normierte Polynom von größtem Grad, das sowohl p_1 als auch p_2 teilt.*

Definition 7.2.7 *Polynome $p_1, p_2 \in K[X]$ heißen* ***teilerfremd***, *wenn $\operatorname{ggT}(p_1, p_2) = 1$ ist.*

Satz 7.2.8 *Für Polynome $p_1, p_2, q \in K[X]$ gilt: $\operatorname{ggT}(p_1 p_2, q) \mid \operatorname{ggT}(p_1, q) \cdot \operatorname{ggT}(p_2, q)$.*

Insbesondere gilt: Wenn q teilerfremd zu p_1 und zu p_2 ist, ist q auch teilerfremd zu $p_1 \cdot p_2$.

7.3 Das Minimalpolynom

Im Folgenden sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Definition 7.3.1 *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus von V und sei $p = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom. Dann definieren wir $p(f) \in \operatorname{End}(V)$ durch*

$$(p(f))(v) := a_0 v + a_1 f(v) + a_2 f(f(v)) + \cdots + a_n \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ mal}}(v)\ldots)).$$

Satz 7.3.2 *Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ und sind $p, q \in K[X]$ Polynome, so gilt $(p \cdot q)(f) = p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$.*

Definition 7.3.3 *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Ein Polynom $p \in K[X]$* ***annulliert*** *f, wenn $p(f)$ die 0-Abbildung ist.*

Satz 7.3.4 *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und seien $p_1, p_2 \in K[X]$. Dann gilt:*

(a) $\ker((p_1p_2)(f)) \supset \ker p_1(f) + \ker p_2(f)$. *Insbesondere: Wenn f von p_1 annulliert wird, dann auch von p_1p_2.*
(b) $\ker((p_1 + p_2)(f)) \supset \ker p_1(f) \cap \ker p_2(f)$. *Insbesondere: Wenn f von p_1 und p_2 annulliert wird, dann auch von $p_1 + p_2$.*
(c) *Für $q := \operatorname{ggT}(p_1, p_2)$ gilt: $\ker q(f) = \ker p_1(f) \cap \ker p_2(f)$. Insbesondere gilt für teilerfremde p_1, p_2: $\ker p_1(f) \cap \ker p_2(f) = \{0\}$.*

Erinnerung an Satz und Definition 3.1.4: Seien V und V' K-Vektorräume. Dann nennt man $V \times V'$ die **direkte Summe** von V und V' und man schreibt auch $V \oplus V'$ dafür.

Konvention 7.3.5 *Sind U, U' und W Untervektorräume eines K-Vektorraums V, so schreiben wir „$W = U \oplus U'$", wenn die Vorschrift $(u, u') \mapsto u + u'$ einen Isomorphismus $U \oplus U' \to W$ definiert, also wenn $W = U + U'$ und $U \cap U' = \{0\}$.*

Allgemeiner schreiben wir $W = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell$ (für Untervektorräume $W, U_1, \dots, U_\ell \subseteq V$), wenn $(u_1, \dots, u_\ell) \mapsto u_1 + \cdots + u_\ell$ einen Isomorphismus $U_1 \oplus \cdots \oplus U_\ell \to W$ definiert.

Satz 7.3.6 *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$, seien $p_1, \dots, p_\ell \in K[X]$ paarweise teilerfremde Polynome, und sei $q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_\ell$. Dann ist $\ker(q(f)) = \ker(p_1(f)) \oplus \cdots \oplus \ker(p_\ell(f))$.*

Definition 7.3.7 *Ein normiertes Polynom $\psi \in K[X]$ heißt **Minimalpolynom** von f wenn f von ψ annulliert wird, und wenn jedes andere Polynom $p \in K[X]$, das f annulliert, ein Vielfaches von ψ ist.*

Satz 7.3.8 *Jeder Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ besitzt ein eindeutiges Minimalpolynom $\psi_f \neq 0$. Dieses Minimalpolynom wird auch durch die folgenden Bedingungen charakterisiert: ψ_f annulliert f, aber kein Teiler $p \mid \psi_f$, der kleineren Grad als ψ_f hat, annulliert f.*

7.4 Die Jordansche Normalform

Im Folgenden sei weiterhin K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum.

Bemerkung: Für beliebige Endomorphismen $g \in \operatorname{End}(V)$ wird die Folge der Untervektoräume $\ker g \subseteq \ker g^2 \subseteq \ker g^3 \subseteq \dots$ irgendwann konstant, d. h. es gibt ein N, so dass $\ker g^N = \ker g^{N+1} = \ker g^{N+2} = \dots$.

Definition 7.4.1 *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und $\lambda \in K$. Der **Eigenraum** von f zum Eigenwert λ ist*

$$\operatorname{Eig}_\lambda(f) := \ker(f - \lambda \operatorname{id}).$$

*Der **Hauptraum** von f zum Eigenwert λ ist*

$$\operatorname{Hau}_\lambda(f) := \ker(f - \lambda \operatorname{id})^N$$

für N wie in der obigen Bemerkung.

Bemerkung: $\operatorname{Eig}_\lambda(f)$ und $\operatorname{Hau}_\lambda(f)$ kann man für beliebige $\lambda \in K$ definieren, aber nur wenn λ ein Eigenwert von f ist, sind diese Räume nicht-trivial. Genauer gilt: λ ist Eigenwert von $f \iff \operatorname{Eig}_\lambda(f) \neq \{0\} \iff \operatorname{Hau}_\lambda(f) \neq \{0\}$.

Satz 7.4.2 (Hauptraumzerlegung) *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom ψ_f in Linearfaktoren zerfällt:*

$$\psi_f = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$$

für paarweise verschiedene $\lambda_i \in K$ und natürliche Zahlen $r_i \geqslant 1$. Dann ist $V = \operatorname{Hau}_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Hau}_{\lambda_k}(f)$. Außerdem sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ genau die Eigenwerte von f.

Bemerkung 7.4.3 *Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (genauer: Korollar 2.4.10) zerfällt im Fall $K = \mathbb{C}$ jedes normierte Polynom in Linearfaktoren. Allgemeiner gibt es zu jedem Körper K einen Körper $K' \supseteq K$, so dass jedes Polynom $f \in K'[X]$ in Linearfaktoren zerfällt. (Beweis davon in der Algebra-Vorlesung.)*

Satz 7.4.4 (Jordansche Normalform) *Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und ist $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt, so gibt es genau einen Isomorphismus $g\colon K^n \to V$ so dass $g^{-1} \circ f \circ g$ durch eine Matrix der folgenden Form gegeben ist:*

$$\left(\begin{array}{ccc}
\left.\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{matrix}}\right\} r_1 \times r_1 & & \text{\Huge 0} \\
& \left.\boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_2 \end{matrix}}\right\} r_2 \times r_2 & \\
& & \ddots \\
\text{\Huge 0} & & \left.\boxed{\begin{matrix} \lambda_\ell & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_\ell \end{matrix}}\right\}
\end{array}\right) r_\ell \times r_\ell$$

hat für $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in K$ und $r_1, \ldots, r_\ell \geqslant 1$. Hierbei sind die Paare $(\lambda_1, r_1), \ldots, (\lambda_\ell, r_\ell)$ bis auf Reihenfolge durch A eindeutig bestimmt.

Bemerkung 7.4.5 *Für Matrizen bedeutet dies: Zerfällt das Minimalpolynom einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ in Linearfaktoren, so gibt es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n \times n}$, so dass $S^{-1}AS$ die Form wie in Satz 7.4.4 hat.*

Bemerkung 7.4.6 *Die jordansche Normalform eines Endomorphismus f lässt sich bestimmen, indem man zunächst die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ bestimmt und dann aus den Dimensionen $d_{i,s} := \dim(\ker(f - \lambda_i)^s)$ die Blockgrößen ableitet: Für $s \geqslant 1$ gibt $d_{i,s} - d_{i,s-1}$ die Anzahl der Blöcke an, die λ_i auf der Diagonalen haben und mindestens Größe $s \times s$ haben.*

Satz 7.4.7 *Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$, deren Minimalpolynome in Linearfaktoren zerfallen, sind genau dann ähnlich, wenn sie die gleiche Jordansche Normalform besitzen (bis auf Reihenfolge der Paare (λ_i, r_i)).*

Definition 7.4.8 *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Man nennt $\dim \operatorname{Eig}_\lambda(f)$ die* ***geometrische Vielfachheit*** *des Eigenwerts λ und $\dim \operatorname{Hau}_\lambda(f)$ die* ***algebraische Vielfachheit*** *des Eigenwerts λ.*

Satz 7.4.9 *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom ψ_f die Form*

$$\psi_f = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdots (X - \lambda_k)^{r_k}$$

hat für $\lambda_i \in K$ und $r_i \geqslant 1$. Dann hat das charakteristische Polynom $\chi_f = \det(f - X \operatorname{id}_V)$ die Form

$$\chi_f = (\lambda_1 - X)^{s_1} \cdots (\lambda_k - X)^{s_k},$$

wobei $s_i \geqslant r_i$ gilt und s_i außerdem genau die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist. Insbesondere ist $\chi_f(f) = 0$.

Bemerkung 7.4.10 *Der* ***Satz von Cayley-Hamilton*** *besagt, dass $\chi_f(f) = 0$ ist auch dann, wenn das Minimalpolynom von f nicht in Linearfaktoren zerfällt.*

Satz 7.4.11 (Jordanzerlegung) *Sei $f \in \operatorname{End}(V)$ ein Endomorphismus, dessen Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann lässt sich f als Summe $f_{\mathrm{d}} + f_{\mathrm{n}}$ schreiben für $f_{\mathrm{d}}, f_{\mathrm{n}} \in \operatorname{End}(f)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *f_{d} ist diagonalisierbar.*
(b) *f_{n} ist nilpotent.*
(c) *f_{d} und f_{n} kommutieren, d. h. $f_{\mathrm{d}} \circ f_{\mathrm{n}} = f_{\mathrm{n}} \circ f_{\mathrm{d}}$.*

8 Vektorraumkonstruktionen

Im ganzen Kapitel sei K ein Körper.

8.1 Unendliche direkte Summen und direkte Produkte

Definition 8.1.1 *Sei M eine beliebige Menge und sei V_m ein K-Vektorraum für jedes $m \in M$.*

(a) *Das* ***direkte Produkt*** *der V_m ist*

$$\prod_{m \in M} V_m = \{(v_m)_{m \in M} \mid v_m \in V_m \text{ für alle } m \in M\};$$

es wird mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation als K-Vektorraum aufgefasst.

(b) *Die* ***direkte Summe*** *der V_m ist der Untervektorraum*

$$\bigoplus_{m \in M} V_m = \{(v_m)_{m \in M} \in \prod_{m \in M} V_m \mid v_m = 0 \text{ für fast alle } m \in M\}.$$

Sei nun $m_0 \in M$.

(c) *Die* ***kanonische Projektion von $\prod_{m \in M} V_m$ nach V_{m_0}*** *ist der Homomorphismus, der $(v_m)_{m \in M}$ auf v_{m_0} abbildet.*

(d) *Die* ***kanonischen Einbettung von V_{m_0} nach $\bigoplus_{m \in M} V_m$*** *ist der Homomorphismus, der $v \in V_{m_0}$ auf dasjenige Tupel $(v_m)_{m \in M}$ abbildet, das gegeben ist durch $v_{m_0} = v$ und $v_m = 0$ für $m \neq m_0$.*
Manchmal identifizieren wir V_m mit seinem Bild unter der kanonischen Einbettung (und fassen V_m so als Untervektorraum von $\bigoplus_{m \in M} V_m$ auf).

Bemerkung 8.1.2 *Ist* $M = \{1, \dots, n\}$, *so ist* $\prod_{m \in M} V_m = \bigoplus_{m \in M} V_m = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$.

Satz 8.1.3 *Seien* M *und* V_m *wie in Definition 8.1.1. Dann haben* $U := \prod_{m \in M} V_m$ *und die kanonischen Projektionen* $f_m : U \to V_m$ *die folgende Eigenschaft:*

(∗) *Ist* W *ein weiterer* K*-Vektorraum und ist* $g_m \in \operatorname{Hom}(W, V_m)$ *für jedes* $m \in M$, *so gibt es genau ein* $h \in \operatorname{Hom}(W, U)$, *so dass* $f_m \circ h = g_m$ *für alle* $m \in M$.

Satz 8.1.4 *Seien* M *und* V_m *wie in Definition 8.1.1. Dann haben* $U := \bigoplus_{m \in M} V_m$ *und die kanonischen Einbettungen* $f_m : V_m \to U$ *die folgende Eigenschaft:*

(∗∗) *Ist* W *ein weiterer* K*-Vektorraum und ist* $g_m \in \operatorname{Hom}(V_m, W)$ *für jedes* $m \in M$, *so gibt es genau ein* $h \in \operatorname{Hom}(U, W)$, *so dass* $h \circ f_m = g_m$ *für alle* $m \in M$.

Definition 8.1.5 *(∗) nennt man die* ***universelle Eigenschaft des direkten Produkts****; (∗∗) nennt man die* ***universelle Eigenschaft der direkten Summe****. Die Abbildung* h *aus (∗) bzw. (∗∗) nennt man den „von den Homomorphismen* g_m ***induzierten Homomorphismus****“.*

Satz 8.1.6 *Seien* M, V_m, $U := \prod_{m \in M} V_m$ *und* $f_m : U \to V_m$ *wie in Satz 8.1.3. Sei außerdem* U' *und* $f'_m \in \operatorname{Hom}(U', V_m)$ *ein weiterer* K*-Vektorraum und weitere Homomorphismen, die zusammen die universelle Eigenschaft des direkten Produkts erfüllen. Dann gibt es genau einen Isomorphismus* $\tilde{h} : U \to U'$, *so dass* $f'_m \circ \tilde{h} = f_m$ *für alle* $m \in M$.

Satz 8.1.7 *Seien* M, V_m, $U := \prod_{m \in M} V_m$ *und* $f_m : U \to V_m$ *wie in Satz 8.1.4. Sei außerdem* U' *und* $f'_m \in \operatorname{Hom}(V_m, U')$ *ein weiterer* K*-Vektorraum und weitere Homomorphismen, die zusammen die universelle Eigenschaft der direkten Summe erfüllen. Dann gibt es genau einen Isomorphismus* $\tilde{h} : U \to U'$, *so dass* $\tilde{h} \circ f_m = f'_m$ *für alle* $m \in M$.

8.2 Freie Vektorräume und Quotienten

Satz 8.2.1 *Sei* M *eine beliebige Menge.*

(a) *Es gibt einen* K*-Vektorraum* V *und eine Abbildung* $f \in \operatorname{Abb}(M, V)$, *so dass gilt:*
   (∗) *Für jeden* K*-Vektorraum* W *und jede Abbildung* $g \in \operatorname{Abb}(M, W)$ *gibt es genau einen Homomorphismus* $h \in \operatorname{Hom}(V, W)$ *mit* $h \circ f = g$.

(b) *Das Paar* (V, f) *aus (a) ist „eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus“ im folgenden Sinne: Ist* (V', f') *ein weiteres Paar, das (∗) erfüllt, so gibt es genau einen Isomorphismus* $\tilde{h} : V \to V'$ *so dass* $\tilde{h} \circ f = f'$ *gilt.*

(c) *Ist* (V, f) *ein Paar wie in (a), so ist* $\{f(m) \mid m \in M\}$ *eine Basis von* V.

Definition 8.2.2 *Sind* M, V *und* f *wie in Satz 8.2.1, so nennt man* V *den* ***freien Vektorraum über*** M *(oder auch* ***freien Vektorraum mit Basis*** M*). Die Eigenschaft (∗) aus dem Satz nennt man die* ***Universelle Eigenschaft des freien Vektorraums****. Der Homomorphismus* h *aus (∗) wird „von* g ***induzierter Homomorphismus****“ genannt. Oft fasst* M *als Teilmenge von* V *auf und bezeichnet den freien Vektorraum über* M *mit* $\langle M \rangle_K$.

Satz 8.2.3 *Sei* V *ein* K*-Vektorraum und* $U \subseteq V$ *ein Untervektorraum.*

(a) *Es gibt einen K-Vektorraum Q und ein $f \in \operatorname{Hom}(V, Q)$ mit $f(U) = 0$, so dass gilt:*
  (∗) *Für jeden K-Vektorraum W und jedes $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $g(U) = 0$ gibt es genau einen Homomorphismus $h \in \operatorname{Hom}(Q, W)$ mit $g = h \circ f$.*

(b) *Das Paar (Q, f) aus (a) ist „eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus": Ist (Q', f') ein weiteres Paar, das (∗) erfüllt, so gibt es genau einen Isomorphismus $\tilde{h}: Q \to Q'$ so dass $\tilde{h} \circ f = f'$ gilt.*

Definition 8.2.4 *Die Eigenschaft (*) aus Satz 8.2.3 nennt man die **Universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums**. Der Homomorphismus h aus (∗) wird „von g **induzierter Homomorphismus**" genannt.*

8.3 Der Dualraum

Definition 8.3.1 *Der Dualraum eines K-Vektorraums V is $V^* := \operatorname{Hom}(V, K)$.*

Beispiel 8.3.2 *$(K^n)^*$ kann mann mit den $1 \times n$-Matrizen identifizieren. (Solche Matrizen entsprechen genau den linearen Abbildungen von K^n nach K.)*

Notation 8.3.3 *Das **Kronecker-Delta** ist wie folgt definiert:*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

(Meistens sind i, j ganze Zahlen; wir erlauben aber Elemente einer beliebigen Menge.)

Satz 8.3.4 *Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so gibt es genau eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von V^*, so dass gilt: $\alpha_i(v_j) = \delta_{ij}$. Insbesondere gilt $\dim V^* = \dim V$.*

Definition 8.3.5 *Die Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ aus Satz 8.3.4 nennt man die **duale Basis** zu $v_1, \dots, v_n$.*

Satz 8.3.6 *Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis eines K-Vektorraums V und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die duale Basis, so gilt für jedes $v \in V$:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(v) v_i$$

Definition 8.3.7 *Sind U, V K-Vektorräume und ist $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$, so definiert man die **duale Abbildung** $f^* \in \operatorname{Hom}(V^*, U^*)$ durch: $f^*(\beta) = \beta \circ f$.*

Satz 8.3.8 *Seien U, V, W K-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$, $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann gilt:*

(a) *$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

(b) *Sind U und V endlich-dimensional, so ist $\operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} f$. Insbesondere ist f surjektiv genau dann, wenn f^* injektiv ist, und f is injektiv genau dann, wenn f^* surjektiv ist.*

Definition 8.3.9 *Für $v \in V$ definieren wir die **Evaluationsabbildung** $\operatorname{ev}_v \in \operatorname{Hom}(V^*, K) = (V^*)^*$ durch: $\operatorname{ev}_v(\alpha) := \alpha(v)$.*

Satz 8.3.10 *Sei $h_V: V \to (V^*)^*$ die Abbildung, die gegeben ist durch $h_V(v) := \mathrm{ev}_v$.*

(a) *Die Abbildung h_V ist linear und injektiv. Ist V endlich-dimensional, so ist h_V sogar bijektiv.*

(b) *Sind V, W Vektorräume und ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so gilt $h_W \circ f = f^{**} \circ h_V$.*

8.4 Tensorprodukte

Definition 8.4.1 *Seien $V_1, \dots, V_n$ und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f: V_1 \times \dots \times V_n \to W$ heißt* ***multilinear****, wenn für alle $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ und für alle j gilt: Die Abbildung*

$$V_i \to W, v \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

ist linear. (Die Menge aller multilinearen Abbildungen $V_1 \times \dots \times V_n \to W$ bildet einen K-Vektorraum.) Ist $n = 2$, so nennt man f auch ***bilinear****.*

Beispiel 8.4.2 *Sind U, V und W K-Vektorräume, so sind die folgenden Abbildungen bilinear:*

(a) $U \times \mathrm{Hom}(U, V) \to V, (u, f) \mapsto f(u)$

(b) $\mathrm{Hom}(U, V) \times \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W), (f, g) \mapsto g \circ f$. *(Also insbesondere auch Matrizenmultiplikation: $K^{\ell \times m} \times K^{m \times n} \to K^{\ell \times n}$.)*

Satz 8.4.3 *Seien $V_1, \dots, V_n$, W K-Vektorräume, und sei $\mathcal{B}_i \subset V_i$ eine Basis für $i = 1, \dots, n$. Sei außerdem eine Abbildung $g: \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_n \to W$ gegeben. Dann gibt es genau eine multilineare Abbildung $f: V_1 \times \dots \times V_n \to W$, die g fortsetzt, d. h. so dass $f(b_1, \dots, b_n) = g(b_1, \dots, b_n)$ falls $b_1 \in \mathcal{B}_1, \dots, b_n \in \mathcal{B}_n$.*

Satz 8.4.4 *Seien U_1, U_2 K-Vektorräume.*

(a) *Es gibt einen K-Vektorraum V und eine bilineare Abbildung $f: U_1 \times U_2 \to V$, so dass gilt:*

   ($*$) *Für jeden K-Vektorraum W und jede bilineare Abbildung $g: U_1 \times U_2 \to W$ gibt es genau einen Homomorphismus $h \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $h \circ f = g$.*

(b) *Das Paar (V, f) aus (a) ist „eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus“: Ist (V', f') ein weiteres Paar, das ($*$) erfüllt, so gibt es genau einen Isomorphismus $\tilde{h}: V \to V'$ so dass $\tilde{h} \circ f = f'$ gilt.*

Bemerkung: Analog kann man auch das Tensorprodukt von mehr als zwei Vektorräumen definieren.

Definition 8.4.5 *Der Vektorraum V aus Satz 8.4.4 wird das* ***Tensorprodukt*** *von U_1 und U_2 genannt; Elemente von V nennt man machmal* ***Tensoren****. ($*$) ist die* ***Universelle Eigenschaft des Tensorprodukts****. Der Homomorphismus h aus ($*$) wird „von g* ***induzierter Homomorphismus****“ genannt.*

Die Notation für V ist $U_1 \otimes U_2$; sind $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, so schreibt man $u_1 \otimes u_2 \in U_1 \otimes U_2$ für $f(u_1, u_2)$.

Satz 8.4.6 *Seien U_1, U_2 K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}_1 \subseteq U_1$, $\mathcal{B}_2 \subseteq U_2$, sei V der freie Vektorraum über $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ und sei $f: U_1 \times U_2 \to V$ die bilineare Abbildung, die $(v_1, v_2) \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset U_1 \times U_2$ abbildet auf den Vektor $(v_1, v_2) \in V$. Dann erfüllt (V, f) die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts. Insbesondere hat $V = U_1 \otimes U_2$ als Basis $\{f(v_1, v_2) = v_1 \otimes v_2 \mid v_1 \in \mathcal{B}_1, v_2 \in \mathcal{B}_2\}$.*

Bemerkung 8.4.7 *Rechenregeln für Tensoren ergeben sich daraus, dass* $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$ *bilinear ist; insbesondere, für* $v_1, v_1' \in V_1$, $v_2, v_2' \in V_2$ *und* $r \in K$*:*

(a) $(rv_1) \otimes v_2 = r(v_1 \otimes v_2) = v_1 \otimes (rv_2)$

(b) $v_1 \otimes 0 = 0$*;* $0 \otimes v_2 = 0$

(c) $(v_1 + v_1') \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 + v_1' \otimes v_2$*;*
$v_1 \otimes (v_2 + v_2') = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v_2'$

Satz 8.4.8 *Sind* U *und* V K*-Vektorräume und ist* $\mathcal{B}$ *eine Basis von* U*, so lässt sich jeder Tensor* $w \in U \otimes V$ *eindeutig schreiben in der Form* $w = \sum_{u \in \mathcal{B}} u \otimes v_u$ *für Vektoren* $v_u \in V$*, die fast alle* 0 *sind.*

Satz 8.4.9 *Seien* V_1, V_2, V_3 K*-Vektorräume. Dann gilt:*

(a) $V_1 \otimes V_2 = V_2 \otimes V_1$.
Genauer: Es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $h\colon V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$*, so dass für alle* $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ *gilt:* $h(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1$.

(b) $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$
Genauer: Es gibt einen eindeutigen Isomorphismus $h\colon V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$*, so dass für alle* $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$ *gilt:* $h(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$.

(c) *In einem ähnlichen Sinn gilt:* $(V_1 \oplus V_2) \otimes V_3 = (V_1 \otimes V_3) \oplus (V_2 \otimes V_3)$

(d) $V_1 \otimes K = V_1$.

Satz 8.4.10 *Seien* U, V K*-Vektorräume. Dann ist die Abbildung* $f\colon U^* \times V \to \mathrm{Hom}(U, V), f(\alpha, v) = (u \mapsto \alpha(u) \cdot v)$ *bilinear. Ist* U *endlich-dimensional, so ist der davon induzierte Homomorphismus* $U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U, V)$ *ein Isomorphismus.*

Satz 8.4.11 *Seien* U, V K*-Vektorräume.*

(a) *Es gibt genau einen Homomorphismus* $f\colon U^* \otimes V^* \to (U \otimes V)^*$ *mit der folgenden Eigenschaft: Sind* $\alpha \in U^*, \beta \in V^*, u \in U, v \in V$*, so ist* $(f(\alpha \otimes \beta))(u \otimes v) = \alpha(u) \cdot \beta(v)$.

(b) *Sind* U *und* V *endlich-dimensional, so ist* f *ein Isomorphismus.*

8.5 Erweiterung von Skalaren

Definition 8.5.1 *Sind* U *und* V K*-Vektorräume, so verwenden wir manchmal die folgende Notationen, um klarer zu machen, dass* U *und* V *als* K*-Vektorräume aufgefasst werden sollen:*

- *Statt* $U \otimes V$ *schreiben wir* $U \otimes_K V$.
- *Statt* $\mathrm{Hom}(U, V)$ *schreiben wir* $\mathrm{Hom}_K(U, V)$.
- *Statt* $\dim V$ *schreiben wir* $\dim_K V$.
- *Statt „linear unabhängig" sagen wir „*K*-linear unabhängig" (für Vektoren aus* V*).*

Satz 8.5.2 *Seien* $K \subseteq K'$ *zwei Körper und sei* V *ein* K*-Vektorraum.*

(a) *Der* K*-Vektorraum* $K' \otimes_K V$ *kann als* K'*-Vektorraum aufgefasst werden, mit der Skalarmultiplikation, die gegeben ist durch* $r'(s' \otimes v) := (r's') \otimes v$ *für* $r', s' \in K'$ *und* $v \in V$.

(b) *Ist* $\mathcal{B} \subset V$ *eine Basis von* V *als* K*-Vektorraum, so ist* $\{1 \otimes v \mid v \in \mathcal{B}\}$ *eine Basis von* $K' \otimes_K V$ *als* K'*-Vektorraum.*

Definition 8.5.3 *Sind K, K' und V wie in Satz 8.5.2, so schreiben wir $V_{K'}$ für den K'-Vektorraum $K' \otimes_K V$. Die Konstruktion von $V_{K'}$ aus V nennt man* ***Erweiterung der Skalare****. Oft fassen wir V als K-Untervektorraum von $V_{K'}$ auf, indem wir $v \in V$ mit $1 \otimes v \in V_{K'}$ identifizieren.*

Satz 8.5.4 *Seien $K \subseteq K'$ Körper und sei V ein K-Vektorraum. Die Erweiterung der Skalare besitzt die folgende universelle Eigenschaft (und wir durch die eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus charakteristiert):*

($*$) Ist W ein K'-Vektorraum, $g \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$, so lässt sich g auf genau eine Weise zu einem Homomorphismus $g' \in \operatorname{Hom}_{K'}(V_{K'}, W)$ fortsetzen.

8.6 Äußere Potenzen

Notation 8.6.1 *Ist V ein K-Vektorraum. wir setzen $V^{\otimes 0} := K$ und, für $r \geqslant 1$, $V^{\otimes r} := V^{\otimes(r-1)} \otimes V = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ mal}}$.*

Definition 8.6.2 *Sei V ein K-Vektorraum und sei $r \geqslant 0$. Die „**r-te äußere Potenz**“ von V ist definiert durch $\bigwedge^r V := V^{\otimes r}/U_r$, wobei U_r der Untervektorraum von $V^{\otimes r}$ ist, der aufgespannt wird von denjenigen Vektoren der Form $u_1 \otimes \cdots \otimes u_r$, bei denen nicht alle u_i verschieden sind.*

Das Bild eines Vektors $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \in V^{\otimes r}$ in $\bigwedge^r V$ wird mit $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ bezeichnet.

Beispiel 8.6.3 *Für beliebige K-Vektorräume V gilt: $\bigwedge^0 V = K$; $\bigwedge^1 V = V$.*

Satz 8.6.4 *Sei V ein K-Vektorraum und sei $r \geqslant 2$. Für $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $1 \leqslant i < j \leqslant r$ gilt:*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_j \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_{j-1} \wedge v_i \wedge v_{j+1} \wedge \cdots \wedge v_r = -v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$$

Satz 8.6.5 *Sei V ein K-Vektorraum und seien $r, s \geqslant 0$. Die bilineare Abbildung $V^{\otimes r} \times V^{\otimes s} \to V^{\otimes(r+s)}$ induziert eine bilineare Abbildung $\bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \to \bigwedge^{r+s} V$, $(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, v_1' \wedge \cdots \wedge v_s') \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \wedge v_1' \wedge \cdots \wedge v_s'$. (Man nennt diese Abbildung das* ***Dachprodukt****.)*

Definition 8.6.6 *Eine multilineare Abbildung $f\colon V^r \to W$ heißt* ***alternierend****, wenn gilt: Sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ und gibt es $i \neq j$ mit $v_i = v_j$, so ist $f(v_1, \ldots, v_r) = 0$.*

Satz 8.6.7 *Sei V ein K-Vektorraum und sei $r \in \mathbb{N}$.*

(a) *Die Abbildung $V^r \to \bigwedge^r V, (v_1, \ldots, v_r) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ ist alternierend.*

(b) *$\bigwedge^r V$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft (und wird durch sie eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus charakterisiert):*

   ($*$) Ist W ein K-Vektorraum und $g\colon V^r \to W$ alternierend, so gibt es genau ein $h \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^r V, W)$, so dass $g(v_1, \ldots, v_r) = h(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r)$ für alle $v_1, \ldots, v_r \in V$.

Notation 8.6.8 *Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit Basis $v_1, \ldots, v_n$ und ist $I = \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ für $i_1 < \cdots < i_r$, so setzen wir im Folgenden $v_I := v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r} \in \bigwedge^r V$.*

Satz 8.6.9 *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $r \geqslant 0$.*

(a) *Es gibt genau eine lineare Abbildung $f\colon \bigwedge^r(V^*) \to (\bigwedge^r V)^*$, so dass für beliebige $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V^*$ und $v_1, \ldots, v_r \in V$ gilt:*

$$(f(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r))(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \det((\alpha_i(v_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant r})$$

Diese Abbildung f ist ein Isomorphismus.

Sei nun $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die zugehörige duale Basis von V^*.

(b) *Sind $I, I' \subseteq \{1, \ldots, n\}$ zwei r-elementige Teilmengen, so ist $(f(\alpha_I))(v_{I'}) = \delta_{I,I'}$ (d. h. 1 falls die Mengen gleich sind und 0 sonst).*

(c) *Die Vektoren $\{v_I \mid I \subseteq \{1, \ldots, n\} \wedge \#I = r\}$ eine Basis von $\bigwedge^r V$. Insbesondere ist $\dim \bigwedge^r V = \binom{n}{r}$, und falls $r > n$ ist, ist $\bigwedge^r V = \{0\}$.*

Satz 8.6.10 *Unter Verwendung von Definition 8.6.2, Definition 8.3.7 und Satz 8.4.11 erhält man Abbildungen $(\bigwedge^r V)^* \to (V^{\otimes r})^* \to (V^*)^{\otimes r} \to \bigwedge^r V^*$. Die Verknüpfung davon ist das $r!$-fache der Abbildung f^{-1} aus Satz 8.6.9. Falls $r!$ im Körper K nicht 0 ist, ist dies also auch ein Isomorphismus. Manchmal wird dieser Isomorphismus verwendet, um $(\bigwedge^r V)^*$ mit $\bigwedge^r V^*$ zu identifizieren.*

Definition 8.6.11 *Seien V und W K-Vektorräume, sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und sei $k \geqslant 0$. Dann bezeichnen wir die lineare Abbildung*

$$\bigwedge^r V \to \bigwedge^r W, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \mapsto f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_r)$$

mit $\bigwedge^r f$.

Satz 8.6.12 *Sei K ein Körper. Wir verwenden Notation 8.6.8 mit der Standard-Basis von K^n.*

(a) *Sind $v_1, \ldots, v_n \in K^n$, so ist $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = \det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) e_{\{1,\ldots,n\}}$.*

(b) *Ist V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$, so ist $\bigwedge^n f \in \operatorname{End}(\bigwedge^n V)$ derjenige Endomorphismus, der jeden Vektor mit $\det f$ multipliziert.*

Satz 8.6.13 (Cramersche Regel) *Sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix und $b \in K^n$. Dann lässt sich die (eindeutige) Lösung $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$ des Gleichungssystems $Ax = b$ wie folgt bestimmen: Sei Q_i die Matrix, die man aus A erhält, indem man die i-te Spalte durch b ersetzt. Dann ist $a_i = \frac{\det Q_i}{\det A}$.*

Satz 8.6.14 *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und sei $r \geqslant 0$. Dann gilt:*

(a) *Vektoren $v_1, \ldots, v_r \in V$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \neq 0$ ist.*

(b) *Sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $v'_1, \ldots, v'_r \in V$ jeweils r linear unabhängige Vektoren, so gilt $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle_K = \langle v'_1, \ldots, v'_r \rangle_K$ genau dann, wenn sich $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ und $v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_r$ nur um einen Faktor unterscheiden.*

8.7 Algebren

Wie immer sei K ein Körper.

Definition 8.7.1 (a) *Eine K-**Algebra** besteht aus einem K-Vektorraum A und einer bilinearen, assoziativen*[1] *Verknüpfung $\cdot\colon A \times A \to A$ (die „Multiplikation" in A). (Assoziativ bedeutet wie immer: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in A$.)*

(b) *Ein **neutrales Element** in A ist ein Element $1 \in A$, so dass für alle $a \in A$ gilt: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.*

Satz 8.7.2 *Sei A ein Ring, der K enthält und so dass für alle $r \in K$ und alle $a \in A$ gilt: $r \cdot a = a \cdot r$. Dann ist A eine K-Algebra, wobei die Skalarmultiplikation $r \cdot a$ mit der Multiplikation $r \cdot a$ übereinstimmt (für $r \in K, a \in A$).*

Beispiel 8.7.3 (a) *Der Polynomring $K[X]$ ist eine K-Algebra.*

(b) *Ist V ein K-Vektorraum, so ist $\operatorname{End}(V)$ eine K-Algebra (mit der Verknüpfung von Abbildungen als Multiplikation).*

(c) *Sind $K \subseteq K'$ Körper, so ist K' eine K-Algebra.*

Definition 8.7.4 *Sei V ein K-Vektorraum. Dann definiert man folgende Algebren:*

(a) *Die **Tensor-Algebra** über V ist*

$$TV := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} V^{\otimes r}$$

mit „$\otimes$" als Multiplikation, d. h. das „Produkt" von $v \in V^{\otimes r}$ und $v' \in V^{\otimes s}$ ist $v \otimes v' \in V^{\otimes (r+s)}$.

(b) *Die **äußere** Algebra über V ist*

$$\textstyle\bigwedge V := \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \bigwedge^r V$$

mit „$\wedge$" als Multiplikation, d. h. das „Produkt" von $v \in \bigwedge^r V$ und $v' \in \bigwedge^s V$ ist $v \wedge v' \in \bigwedge^{r+s} V$.

Bemerkung 8.7.5 *Ist $\dim V = n$, so ist $\dim(\bigwedge V) = 2^n$. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so ist $\{v_I \mid I \subseteq \{1, \dots, n\}\}$ eine Basis von $\bigwedge V$ (unter Verwendung von Notation 8.6.8).*

[1] Manchmal spricht man auch dann von einer Algebra, wenn die Verknüpfung nicht assoziativ ist.

Index