Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Klausur Lineare Algebra II

Sommersemester 2014
28.07.2014

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende Deckblatt, ggf. mit Unterschrift, Aufgabenblatt und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Sei K ein Körper und $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Begleitmatrix eines normierten Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad n. Dann ist das Minimalpolynom von B gleich f.
☐	☐	Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus von V auf den Dualraum V^* aller Linearformen auf V.
☐	☐	Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ wenigstens eine nicht-ausgeartete symplektische Bilinearform.
☐	☐	Sei (V, β) ein endlich dimensionaler regulärer metrischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ist (V, β) anisotrop, so ist (V, β) entweder positiv definit oder negativ definit.
☐	☐	Das Kronecker-Produkt $A \otimes B$ von zwei schiefsymmetrischen Matrizen $A \in \mathrm{GL}_m(K)$, $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ über einem Körper K ist stets wieder schiefsymmetrisch.

(b) Sei K ein kommutativer Ring mit 1, und sei $n \in \mathbb{N}$. Nennen Sie die Definition des Tensorproduktes (T, τ) von K-Moduln $M_1, \ldots, M_n$, und erklären Sie die $\otimes$-Notation in diesem Zusammenhang.

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Sei α ein injektiver Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Dann gibt es höchstens endlich viele α-invariante Untervektorräume.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$. Für $v, w \in \mathbb{C}^n$ gilt dann $\langle vA, w \rangle = \langle v, wA^* \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Standard-hermitesche-Form bezeichnet.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 (*14 Punkte*) Sei $\alpha\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ eine lineare Abbildung mit Koordinatenmatrix A bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^7$. Das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von α (bzw. A) seien

$$f = (X-2)^4(X+1)^3 \quad \text{und} \quad g = (X-2)^2(X+1)^2.$$

(a) Ist α (bzw. A) diagonalisierbar?

(b) Erstellen Sie eine Liste aller in Frage kommenden Jordanschen Normalformen für die Matrix A. Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(c) Die Einschränkung $\alpha' = \alpha|_U$ von α auf den verallgemeinerten Eigenraum $U = \mathrm{Kern}((\alpha - 2\mathrm{id})^4)$ habe bzgl. einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_4)$ von U die Koordinatenmatrix

$$A' = [\alpha']_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 & -3 \\ 1/2 & 1/4 & 7/4 & 5 \\ 1/2 & -3/4 & 11/4 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 3 \end{pmatrix},$$

d. h. $v_1\alpha = 2v_1 + \frac{3}{2}v_2 - \frac{3}{2}v_3 - 3v_4$ und so weiter. Bestimmen Sie eine Basis für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(\alpha, 2)$, wobei Sie die Basiselemente bitte explizit als Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_4$ ausdrücken.

(d) Können Sie aufgrund der in (c) gewonnenen Zusatzinformationen die Jordansche Normalform für A nun eindeutig bestimmen? Erläutern Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (*14 Punkte*) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a + bx + cx^2$ vom Grad höchstens 2. Betrachten Sie die wie folgt definierten Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon V \to \mathbb{R}$:

$$f\varphi_1 = 12\int_0^1 tf(t)\,dt, \quad f\varphi_2 = f(0) + f'(1), \quad f\varphi_3 = f''(0) \qquad \text{für } f \in V.$$

(a) Welche Dimension haben jeweils V und der Dualraum V^*?

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Linearformen auf V sind und eine Basis des Dualraums V^* bilden.

(c) Bestimmen Sie Polynomfunktionen $g_1, g_2, g_3 \in V$, so dass die Basis $\mathcal{C} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ von V^* dual zu der Basis $\mathcal{B} = (g_1, g_2, g_3)$ von V ist.

(d) Die Abbildung $\vartheta\colon V \to V$, $f \mapsto f'$, ist bekanntlich linear. Bestimmen Sie die Bilder von φ_2 und φ_3 unter der dualen Abbildung $\vartheta^*\colon V^* \to V^*$, jeweils als Linearkombination von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Aufgabe 4 (*10 Punkte*) Sei $K = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, der Körper mit 5 Elementen, und $V = K^4$ der Standardvektorraum. Sei β die Bilinearform auf V, deren Strukturmatrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die folgende Gestalt habe:

$$[\beta]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Ist β symmetrisch? Ist β symplektisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie, dass β nicht-ausgeartet ist.

(c) Berechnen Sie für (V, β) eine Orthogonalbasis (falls β symmetrisch ist) bzw. eine symplektische Basis (falls β symplektisch ist).

Aufgabe 5 (*12 Punkte*) Sei K ein Körper und (V, β) ein isotroper regulärer metrischer K-Vektorraum mit $\dim_K V = 2$.

(a) Beweisen Sie, nur unter Verwendung der einfließenden Definitionen: Ist die Charakteristik $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, so gibt es eine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v, w)$ von V mit $\beta(v, v) = 1$ und $\beta(w, w) = -1$.

(b) Geben Sie für $K = \{0, 1\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ explizit ein Beispiel für einen isotropen regulären metrischen K-Vektorraum mit $\dim_K V = 2$ an, so dass es keine Orthogonalbasis $\mathcal{B} = (v, w)$ von V mit $\beta(v, v) = 1$ und $\beta(w, w) = -1 = 1$ gibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Sei K ein Körper und V ein 3-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\alpha\colon V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus dergestalt, dass $\alpha^3 = 0$, aber $\alpha^2 \neq 0$ ist.

(a) Geben Sie, mit einer knappen Begründung, die Jordansche Normalform A von α an.

(b) Berechnen Sie das Kronecker-Produkt $A \otimes A$.

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von $A \otimes A$.

(d) Berechnen Sie die Jordansche Normalform für den Endomorphismus $\alpha \otimes \alpha\colon V \otimes_K V \to V \otimes_K V$.