Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

Nachklausur Lineare Algebra II

Sommersemester 2014
29.09.2014

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende Deckblatt, ggf. mit Unterschrift, Aufgabenblatt und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Jeder Endomorphismus $\alpha\colon V \to V$ eines endlich dimensionalen K-Vektorraums genügt seiner eigenen charakteristischen Gleichung, d.h. $f(\alpha) = 0$ für das charakteristische Polynom f von α.
☐	☐	Seien V, W endlich dimensionale K-Vektorräume. Eine Bilinearform $\beta\colon V \times W \to K$ ist nicht-ausgeartet bzgl. der ersten Variablen genau dann, wenn sie nicht-ausgeartet bzgl. der zweiten Variablen ist.
☐	☐	Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2. Dann enthält jeder isotrope endlich dimensionale reguläre metrische Vektorraum über K eine hyperbolische Ebene.
☐	☐	Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Jeder R-Modul ist isomorph zu einem Faktormodul F/N eines freien R-Moduls F nach einem Untermodul N.
☐	☐	Das Kronecker-Produkt $A \otimes B$ von zwei invertierbaren Matrizen $A \in \mathrm{GL}_m(K)$, $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ über einem Körper K ist stets wieder invertierbar.

(b) Sei $V = (V, \langle , \rangle)$ ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum, und sei $\eta\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Geben Sie die Definition der Adjungierten η^* an, und erklären Sie, unter welcher Voraussetzung η normal heißt. Formulieren Sie schließlich den Spektralsatz für normale Endomorphismen von V.

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie einen Beweis, nur unter Verwendung der einfließenden Definitionen, bzw. ein Gegenbeispiel an.

(i) Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum V. Dann lässt sich β als Summe $\beta = \beta_{\mathrm{s}} + \beta_{\mathrm{a}}$ einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform auf V schreiben.

(ii) Seien $V = \langle v \rangle$ ein 1-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Dann gilt $\dim_K(V \otimes_K V) = 1$.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 (*14 Punkte*) Sei $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ der Körper mit 5 Elementen und $\alpha\colon \mathbb{F}_5^8 \to \mathbb{F}_5^8$ eine lineare Abbildung mit Koordinatenmatrix A bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{F}_5^8$. Das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von α (bzw. A) seien

$$f = (X^2 - 2)(X - 1)^4 X^2 \quad \text{und} \quad g = (X^2 - 2)(X - 1)^2 X.$$

Sei $\mathbb{E}$ ein Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_5$, der eine Nullstelle von $X^2 - 2$ enthält; man bezeichne diese mit $\sqrt{2}$.

(a) Zeigen Sie, dass $X^2 - 2$ irreduzibel über $\mathbb{F}_5$ ist. Welche Eigenwerte hat A in $\mathbb{E}$? Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{F}_5$? Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{E}$?

(b) Erstellen Sie eine Liste aller in Frage kommenden Jordanschen Normalformen für die Matrix A über $\mathbb{E}$. Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(c) Die Einschränkung $\alpha' = \alpha|_U$ von α auf den verallgemeinerten Eigenraum $U = \mathrm{Kern}((\alpha - \mathrm{id})^8)$ habe bzgl. einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_4)$ von U die Koordinatenmatrix

$$A' = [\alpha']_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. $v_1\alpha = 3v_1 + 4v_3 + 4v_4$ und so weiter. Bestimmen Sie eine Basis für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(\alpha, 1)$, wobei Sie die Basiselemente bitte explizit als Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_4$ ausdrücken.

(d) Können Sie aufgrund der in (c) gewonnenen Zusatzinformationen die Jordansche Normalform für A über $\mathbb{E}$ nun eindeutig bestimmen? Erläutern Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (*10 Punkte*) Sei $V = \mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum, ausgestattet mit einer symmetrischen Bilinearform β, deren Strukturmatrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die folgende Gestalt habe:

$$[\beta]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass β nicht-ausgeartet ist.

(b) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis für (V, β).

(c) Geben Sie unter Verwendung des Sylvesterschen Trägheitssatzes eine vollständige Liste von Vertretern für die Kongruenzklassen von invertierbaren symmetrischen 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$ an.
Entscheiden Sie zu welcher Kongruenzklasse die Matrix $[\beta]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ gehört, und begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 4 (*14 Punkte*) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a + bx$ vom Grad höchstens 1. Betrachten Sie die wie folgt definierte Bilinearform auf V:

$$\beta(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \qquad \text{für } f, g \in V.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\phi_1, \phi_2\colon V \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f\phi_1 = \beta(f, 1), \quad f\phi_2 = \beta(f, x) \qquad \text{für } f \in V,$$

Linearformen auf V sind und eine Basis des Dualraums V^* bilden.

(b) Bestimmen Sie Polynomfunktionen $g_1, g_2 \in V$, so dass die Basis $\mathcal{C} = (\phi_1, \phi_2)$ von V^* dual zu der Basis $\mathcal{B} = (g_1, g_2)$ von V ist.

(c) Die Abbildung $\vartheta\colon V \to V$, $f \mapsto 2f + f'$, ist offenbar linear. Bestimmen Sie die Bilder von ϕ_1 und ϕ_2 unter der dualen Abbildung $\vartheta^*\colon V^* \to V^*$, jeweils als Linearkombination von ϕ_1, ϕ_2.

(d) Seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3\colon V \to V$ gegeben durch

$$f\vartheta_1 = 2f, \quad f\vartheta_2 = f', \quad f\vartheta_3 = f(1) \qquad \text{für } f \in V$$

Bestimmen Sie einen geeigneten Endomorphismus $\vartheta_4\colon V \to V$, so dass $\mathcal{D} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{End}(V)$ bildet.

Aufgabe 5 (*12 Punkte*) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, und sei β eine nicht-ausgeartete symplektische Bilinearform auf V.

(a) Beweisen Sie, nur unter Verwendung der einfließenden Definitionen: Ist $\dim_K V = 2$, so gibt es eine Basis (v, w) von V mit $\beta(v, v) = \beta(w, w) = 0$ und $\beta(v, w) = -\beta(w, v) = 1$.

(b) Beweisen Sie: Allgemein ist die Dimension $\dim_K(V) = 2m$ gerade, und es gibt eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_m, w_1, w_2, \ldots, w_m)$ von V dergestalt, dass die Strukturmatrix von β bezüglich $\mathcal{B}$ die Gestalt

$$[\beta]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{O}_m & \mathrm{Id}_m \\ -\mathrm{Id}_m & \mathrm{O}_m \end{pmatrix}$$

hat, wobei O_m die $m\times m$-Nullmatrix und Id_m die $m\times m$-Einheitsmatrix bezeichnen.

Dazu dürfen Sie ohne Herleitung die Ihnen bekannte Dimensionsformel

$$\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V) + \dim(V^\perp \cap U),$$

verwenden, die für Unterräume U von V und die Senkrechtrelation bzgl. der symplektischen Bilinearform β gilt.

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Seien $V = \mathbb{Q}^3$, $W = \mathbb{Q}^2$ die Standardvektorräume mit den Standardbasen $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$. Seien $\alpha\colon V \to V$ und $\beta\colon W \to W$ Endomorphismen mit Koordinatenmatrizen

$$A = [\alpha]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = [\beta]_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

d. h. $e_1\alpha = e_1 + e_2$ und so weiter.

(a) Geben Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von α sowie von β an.

(b) Berechnen Sie das Kronecker-Produkt $A \otimes B = [\alpha \otimes \beta]_{\mathcal{E}\otimes\mathcal{F},\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}}$.

(c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom für den Endomorphismus $\alpha \otimes \beta\colon V \otimes_{\mathbb{Q}} W \to V \otimes_{\mathbb{Q}} W$.

(d) Berechnen Sie die Jordansche Normalform und das Minimalpolynom für den Endomorphismus $\alpha \otimes \beta\colon V \otimes_{\mathbb{Q}} W \to V \otimes_{\mathbb{Q}} W$.