Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Klausur Lineare Algebra II

Sommersemester 2018
26.07.2018

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Als Hilfsmittel ist zugelassen ein beidseitig handschriftlich beschriebenes A4-Blatt.
- Geben Sie am Ende die Aufgabenblätter und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*16 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Für $n \in \mathbb{N}$ ist der Dualraum V^* eines n-dimensionalen Vektorraums V stets isomorph zu V.
☐	☐	Das Radikal einer symplektischen Bilinearform auf dem reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^7$ kann nicht 3-dimensional sein.
☐	☐	Bis auf Isomorphie gibt es über dem Körper $\mathbb{R}$ genau 7 reguläre metrische Vektorräume der Dimension 7.
☐	☐	Über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ gibt es genau 6 Ähnlichkeitsklassen[1] von 5×5-Matrizen mit charakteristischem Polynom $X^5 + X^3$.
☐	☐	Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$ ist der Nullmodul.

Bearbeiten Sie Aufgabenteile (b) und (c) auf einem Extrablatt.

(b) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit Koordinatenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(bzgl. der Standardbasen)}$$

die äußere Potenz $\bigwedge^2 \alpha\colon \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \to \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$. Geben Sie dazu zunächst Basen der beteiligten Vektorräume an und berechnen Sie dann die zugehörige Koordinatenmatrix.

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie eine Begründung an.

(i) Sei $\alpha\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums, und sei $f \in \mathbb{R}[X]$. Dann ist jeder Eigenvektor $v \in V$ von α auch ein Eigenvektor von $\beta = f(\alpha)\colon V \to V$.

(ii) Sei $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf dem reellen Intervall $[-\pi, \pi]$. Dann ist V bzgl.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt \qquad (f, g \in V)$$

ein unitärer Vektorraum.[2]

[1] $A, B \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{F}_2)$ heißen ähnlich, falls $A = T^{-1}BT$ für geeignetes $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{F}_2)$ gilt.

[2] Grundlegende Aussagen aus der Integralrechnung sind kommentarlos zu verwenden.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 (*14 Punkte*) Sei $V = \mathbb{C}^4$ mit Standardbasis $\mathfrak{E}$. Betrachten Sie die linearen Endomorphismen $\alpha\colon V \to V$ und $\beta\colon V \to V$ des komplexen Vektorraums V mit den Koordinatenmatrizen

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = [\beta]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome von α und β.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von α und β, jeweils mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(c) Beschreiben Sie alle α-invarianten Untervektorräume von V, indem Sie geeignete Basen für diese angeben. (Tipp: Verwenden Sie die Standardbasisvektoren.) Wie viele solche Räume gibt es?

(d) Beschreiben Sie alle β-invarianten Untervektorräume von V, indem Sie geeignete Basen für diese angeben. (Tipp: Arbeiten Sie mit Eigenvektoren von β.) Wie viele solche Räume gibt es?

Aufgabe 3 (*12 Punkte*) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a + bx + cx^2$ vom Grad höchstens 2. Seien $u, v, w \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden, und betrachten Sie die wie folgt definierten Abbildungen $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w\colon V \to \mathbb{R}$:

$$f\varphi_u = f(u), \qquad f\varphi_v = f(v), \qquad f\varphi_w = f(w).$$

(a) Welche Dimension haben jeweils V und der Dualraum V^*?

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w$ Linearformen auf V sind und eine Basis des Dualraums V^* bilden.

(c) Bestimmen Sie Polynomfunktionen $g_u, g_v, g_w \in V$, so dass die Basis $\mathfrak{C} = (\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w)$ von V^* dual zu der Basis $\mathfrak{B} = (g_u, g_v, g_w)$ von V ist.

(d) Seien nun $u = -1$, $v = 0$ und $w = 1$. Die Abbildung $\vartheta\colon V \to V$, $f \mapsto f'$ ist bekanntlich linear. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix der dualen Abbildung $\vartheta^*\colon V^* \to V^*$ bzgl. der Basis $\mathfrak{C} = (\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1)$.

Aufgabe 4 (*12 Punkte*) Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, ausgestattet mit der Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad \langle A, B \rangle = \mathrm{Spur}(AB).$$

(a) Zeigen Sie: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Bilinearform auf V.

(b) Geben Sie für $n = 2$ explizit die Strukturmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bzgl. der Basis $\mathfrak{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ an, wobei $E_{i,j}$ die Elementarmatrix mit Eintrag 1 an Position (i, j) und Einträgen 0 überall sonst bezeichnet.

(c) Zeigen Sie: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch und nicht-ausgeartet.

(d) Bestimmen Sie, bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, den Orthogonalraum $U^\perp$ zu dem Raum U aller Diagonalmatrizen: Geben Sie eine Basis für $U^\perp$ an und begründen Sie Ihre Wahl.

(e) Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv-definit? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (*12 Punkte*) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Standardbasis $\mathfrak{E}$. Betrachten Sie den linearen Endomorphismus $\alpha \colon V \to V$ mit der Koordinatenmatrix

$$A = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Kronecker-Produkt $A \otimes A$.

(b) Verifizieren Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) direkt: 1 ist ein Eigenwert von $\alpha \otimes \alpha \colon V \otimes V \to V \otimes V$ mit geometrischer Vielfachheit 2.

(c) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von A über $\mathbb{C}$.

(d) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $\alpha \otimes \alpha \colon V \otimes V \to V \otimes V$, inklusive der geometrischen Vielfachheiten, indem Sie $\alpha_{\mathbb{C}} \otimes \alpha_{\mathbb{C}}$ für die induzierte $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\alpha_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \to \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ zu Hilfe nehmen.

Aufgabe 6 (*14 Punkte*) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{C}^n$ der unitäre Raum bzgl. der Standard-hermiteschen-Form

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

(a) Sei $n = 3$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für den Untervektorraum $W = \langle v_1, v_2 \rangle$ von V mit

$$v_1 = (1, i, 0) \qquad \text{und} \qquad v_2 = (1, 2, 1-i).$$

(b) Sei $n = 3$. Bestimmen Sie die adjungierte Abbildung $\eta^* \colon V \to V$ zu

$$\eta \colon V \to V, \quad (x, y, z) \mapsto (ix + (2+3i)y,\ 3x + (3-i)z,\ (2-5i)y + iz).$$

(c) Zeigen Sie: Zu jeder Linearform $\varphi \colon V \to \mathbb{C}$ existiert genau ein Vektor $u = u_\varphi \in V$ mit: $v\varphi = \langle v, u \rangle$ für alle $v \in V$.
Ist $V^* \to V$, $\varphi \mapsto u_\varphi$ ein Isomorphismus von dem Dualraum $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ auf V? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Zeigen Sie: Ist $\eta \colon V \to V$ ein linearer Endomorphismus und $\eta^* \colon V \to V$ die adjungierte Abbildung, so gelten

$$\mathrm{Bild}(\eta^*) = (\mathrm{Kern}(\eta))^{\perp} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Rang}(\eta) = \mathrm{Rang}(\eta^*).$$