Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Zweite Klausur Lineare Algebra II

Sommersemester 2018
20.09.2018

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Als Hilfsmittel ist zugelassen ein beidseitig handschriftlich beschriebenes A4-Blatt.
- Geben Sie am Ende die Aufgabenblätter und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*14 Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage <u>direkt auf diesem Blatt</u>, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Jede positiv-definite symmetrische Bilinearform auf dem 7-dimensionalen reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^7$ ist regulär.
☐	☐	Es gibt keinen reellen Vektorraum V mit $V \cong V \oplus V$.
☐	☐	Bis auf Isomorphie gibt es über dem Körper $\mathbb{R}$ genau 10 metrische Vektorräume der Dimension 3.
☐	☐	Über $\mathbb{R}$ gibt es genau 4 Ähnlichkeitsklassen[1] von 5×5-Matrizen mit charakteristischem Polynom $X^5 + X^3$.
☐	☐	Das Kroneckerprodukt $A \otimes B$ von zwei symmetrischen Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_m(K)$, $B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ über einem Körper K ist stets wieder symmetrisch.

Bearbeiten Sie Aufgabenteile (b) und (c) <u>auf einem Extrablatt</u>.

(b) Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ sowie die Bilinearform

$$\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad \beta(A, B) = \mathrm{Spur}\left(A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B\right).$$

Bestimmen Sie die Strukturmatrix $[\beta]_{\mathfrak{E}}$ von β bzgl. der Basis

$$\mathfrak{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ist β symmetrisch? Ist β schiefsymmetrisch?

(c) Entscheiden Sie für jede der nachstehenden Aussagen, ob diese wahr oder falsch ist, und geben Sie eine Begründung an.

(i) Das auf dem reellen Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mittels

$$(x_1, x_2, x_3) \times_{\mathrm{sp}} (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

definierte *Spatprodukt* vermittelt eine alternierende 3-multilineare Abbildung $\varphi\colon V \times V \times V \to V$, $(u, v, w) \mapsto (u \times_{\mathrm{sp}} v) \times_{\mathrm{sp}} w$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{U}(n, \mathbb{C})$ eine unitäre Matrix. Dann gilt für $v \in \mathbb{C}^n$ stets $\|vA\| = \|v\|$, d.h., der A zugeordnete lineare Endomorphismus von $\mathbb{C}^n$ erhält die unitäre Norm, und folglich hat jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A den Absolutbetrag 1.

[1] $A, B \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$ heißen ähnlich, falls $A = T^{-1}BT$ für geeignetes $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R})$ gilt.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 (*13 Punkte*) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen, und sei $\alpha\colon \mathbb{F}_3^7 \to \mathbb{F}_3^7$ die lineare Abbildung mit Koordinatenmatrix

$$A = (a_{ij}) = [\alpha]_{\mathfrak{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{E} = (e_1, \ldots, e_7)$, so dass für $1 \leq i \leq 7$ gilt:

$$e_i\alpha = \sum\nolimits_{j=1}^{7} a_{ij}e_j.$$

(a) Berechnen Sie die Koordinatenmatrix $B = [\alpha]_{\mathfrak{F}}$ von α bzgl. der Basis $\mathfrak{F} = (f_1, \ldots, f_7)$, wobei $f_i = e_i$ für $i \in \{1, 4, 5, 6\}$ und

$$f_2 = e_3, \quad f_3 = e_2 - e_3 - e_4 - e_6, \quad f_7 = e_7 - e_1.$$

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von α.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von α und geben Sie jeweils die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

(d) Geben Sie die Jordansche Normalform für A an.

Aufgabe 3 (*12 Punkte*) Seien $V = \mathbb{Q}^m$, $W = \mathbb{Q}^n$ Standardvektorräume der Dimensionen $m, n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie lineare Endomorphismen $\alpha\colon V \to V$ und $\beta\colon W \to W$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen paarweise äquivalent sind:

(i) Der einzige Eigenwert von α in $\mathbb{C}$ ist 0.
(ii) Das charakteristische Polynom von α ist X^m.
(iii) Das Minimalpolynom von α ist X^k für geeignetes $k \in \{1, \ldots, m\}$.
(iv) α ist nilpotent, d.h., $\alpha^k = 0$ für alle hinreichend großen $k \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie das Kroneckerprodukt $A \otimes B$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Verifizieren Sie mit Hilfe der Äquivalenzen in (a): Ist α nilpotent, so ist auch $\alpha \otimes \beta\colon V \otimes W \to V \otimes W$ nilpotent.

(d) Verifizieren Sie mit Hilfe der definierenden Eigenschaft von $\alpha \otimes \beta$: Ist β nilpotent, so ist auch $\alpha \otimes \beta\colon V \otimes W \to V \otimes W$ nilpotent.

bitte wenden!

Aufgabe 4 (*14 Punkte*) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller homogenen reellen Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ vom Grad 2. Die Abbildungen $\alpha,\beta,\gamma\colon V\to V$ seien gegeben durch[3]

$$f^\alpha(x,y)=f(x,y),\quad f^\beta(x,y)=x\cdot(\partial_1 f)(x,y),\quad f^\gamma(x,y)=y\cdot(\partial_2 f)(x,y).$$

Betrachten Sie die wie folgt definierten Abbildungen $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\colon V\to\mathbb{R}$:

$$f\varphi_1=f(1,1),\qquad f\varphi_2=f(1,0),\qquad f\varphi_3=f(0,1).$$

(a) Verifizieren Sie, dass α,β,γ Endomorphismen des Vektorraums V sind, indem Sie Koordinatenmatrizen bzgl. einer geeigneten Basis angeben. Welche dieser Abbildungen sind invertierbar und warum?

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ Linearformen auf V sind und eine Basis des Dualraums V^* bilden.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix der zu $\beta\colon V\to V$ dualen Abbildung $\beta^*\colon V^*\to V^*$ bzgl. der Basis $\mathfrak{C}=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$.

(d) Geben Sie zu $d\in\{0,1,2,3\}$ jeweils $\{f\in V\mid \dim\langle f,f^\alpha,f^\beta\rangle=d\}$, also das volle Urbild von $\{d\}$ unter der Abbildung

$$V\to\{0,1,2,3\},\qquad f\mapsto\dim\langle f,f^\alpha,f^\beta\rangle,$$

explizit an.

Aufgabe 5 (*14 Punkte*) Sei $m\in\mathbb{N}$. Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V=\mathbb{R}^{2m}$, ausgestattet mit der Bilinearform

$$V\times V\to\mathbb{R},\quad \langle(x_1,\dots,x_{2m}),(y_1,\dots,y_{2m})\rangle=\sum_{i=1}^m x_iy_{m+i}-x_{m+i}y_i.$$

(a) Geben Sie die Strukturmatrix von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{E}=(e_1,\dots,e_{2m})$ von V an.

(b) Begründen Sie: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist symplektisch und nicht ausgeartet.

(c) Geben Sie eine symplektische Basis für die Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ an.

(d) Zeigen Sie:

$$U=\{\alpha\in\mathrm{End}(V)\mid \forall v,w\in V:\langle v\alpha,w\rangle+\langle v,w\alpha\rangle=0\}$$

ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{End}(V)$.

(e) Bestimmen Sie für $m=2$ die Dimension des in (d) definierten Vektorraums U.

[3] Allgemein sind die partiellen Ableitungen $\partial_1 g,\partial_2 g\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ einer reellen Polynomfunktion $g\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x,y)=\sum_{i,j=0}^n a_{i,j}x^iy^j$ in zwei Variablen gegeben durch $(\partial_1 g)(x,y)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^n ia_{i,j}x^{i-1}y^j$ und $(\partial_2 g)(x,y)=\sum_{i=0}^n\sum_{j=1}^n ja_{i,j}x^iy^{j-1}$.

Aufgabe 6 (*13 Punkte*) Betrachten Sie den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}^3$, ausgestattet mit der Sesquilinearform

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_3\overline{y_3},$$

wobei $\overline{z}$ die zu $z \in \mathbb{C}$ komplex-konjugierte Zahl bezeichnet.

(a) Geben Sie die Strukturmatrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bzgl. der Standardbasis $\mathfrak{E}$ an und zeigen Sie: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine positiv-definite hermitesche Form.

(b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis für V bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(c) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die Koordinatenmatrix $[\eta^*]_{\mathfrak{E}}$ der bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ adjungierten Abbildung $\eta^* \colon V \to V$ zu

$$\eta \colon V \to V, \quad (x, y, z) \mapsto (x\ y\ z)T,$$

in Abhängigkeit von der Koordinatenmatrix

$$T = \begin{pmatrix} a & b & v_1 \\ c & d & v_2 \\ u_1 & u_2 & t \end{pmatrix} = [\eta]_{\mathfrak{E}} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{C}).$$

(d) Verwenden Sie die in (c) hergeleitete Formel dazu, die Koordinatenmatrizen $[\eta]_{\mathfrak{E}}$ derjenigen linearen Abbildungen $\eta \colon V \to V$ zu bestimmen, die bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und bzgl. der Standard-hermiteschen-Form jeweils dieselbe Adjungierte haben.