Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 10

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 9.7.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Betrachten Sie den Körper $K := \mathbb{F}_2$, der aus zwei Elementen 0 und 1 besteht. Dann besteht der K-Vektorraum $K^2 = \mathbb{F}_2^2$ aus genau vier Elementen. Sei nun W die vierelementige Menge $W = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$. Legen Sie eine Bijektion zwischen $\mathbb{F}_2^2$ und W fest, und machen Sie W damit zu einem $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, indem Sie den Strukturtransfer-Satz $\ell 15.1$ anwenden. Bestimmen Sie dann alle Untervektorräume U von W, und alle Quotientenvektorräume W/U.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien V und W K-Vektorräume und sei U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie, dass für $H_U := \{f \in \operatorname{Hom}(V, W);\ U \subseteq \ker f\}$ gilt:

$$\operatorname{Hom}(V, W)/H_U \cong \operatorname{Hom}(U, W).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei V ein K-Vektorraum mit abzählbar unendlicher Basis. Geben Sie einen Isomorphismus $f : V \to V \oplus V$ an.

Hinweis: Haben $V \oplus V \cong V \times V$. Mit $B = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ betrachte man die Abbildung $i : V \to V \times V$ mit $i(b_n) = g(n)$, wo $g(n) := (b_{n/2}, 0)$ für gerades n und wo $g(n) := (0, b_{(n-1)/2})$ für ungerades n ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei U ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $f : U \to U$ ein Endomorphismus und $W \subseteq U$ ein f-invarianter Unterraum. Sei $f_W := f|_W : W \to W$ die Einschränkung von f auf W und $\bar{f} : U/W \to U/W$ die von f induzierte Abbildung auf dem Quotienten. Seien ψ, ψ_W und $\bar{\psi}$ die Minimalpolynome von f, f_W und $\bar{f}$. Zeigen Sie:

(a) ψ_W teilt ψ,

(b) $\bar{\psi}$ teilt ψ,

(c) ψ teilt $\psi_W \bar{\psi}$.

(d) Konstruieren Sie ein Beispiel für den Fall $\psi \neq \psi_W \bar{\psi}$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu l15 und l16: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wie kann man mit einem Strukturtransfer eine beliebige Menge W, für die es lediglich eine Bijektion mit einem Vektorraum V gibt, selbst zu einem Vektorraum machen?

2.) Was ist ein Quotientenraum V/U? Welche universelle Eigenschaft charakterisiert ihn bis auf Isomorphie?

3.) Welche Abbildung nennt man in diesem Zusammenhang einen kanonischen Epimorphismus?

4.) Warum erfüllen alle zu V/U isomorphen Vektorräume die universelle Eigenschaft des Quotientenraums?

5.) Über welche universelle Eigenschaft definiert man die direkte Summe von Vektorräumen V_i mit $i \in I$ (wo I eine beliebige Indexmenge bezeichnet)?

6.) Ist diese direkte Summe, geschrieben als $\oplus_{i \in I} V_i$, damit (bis auf Isomorphie) auch eindeutig bestimmt? Warum?

7.) Wie kann man diese direkte Summe auch konstruieren und damit ihre Existenz beweisen?

8.) Inwiefern liefert eine Aufteilung einer Basis in Teilfamilien auch eine direkte Summenzerlegung des Vektorraums?

9.) Über welche universelle Eigenschaft definiert man den freien Vektorraum $V(B)$ über B? Warum ist dieser (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt?

10.) Wie kann man $V(B)$ konkret konstruieren?

11.) Welche universelle Eigenschaft haben direkte Summen noch (mit Epimorphismen ausgedrückt)?

12.) Wie definiert man die freie Algebra über einer Menge B?

13.) Inwiefern ist die freie Algebra über B das Urbild aller Algebren?

14.) Warum ist jeder Vektorraum frei, aber nicht jede Algebra frei?

15.) Wie wird eine freie Algebra über einer Menge B konstruiert?

16.) Wie wird die Multiplikation $\otimes$ darin definiert?

17.) Welche Unterräume von $A(B)$ heißen homogen vom Grad n?

18.) Wann heißt eine Teilmenge einer Algebra ein Ideal?

19.) Sind Kerne von Algebrenhomomorphismen immer Ideale?

20.) Wie definiert man (bis auf Isomorphie) die Quotientenalgebra A/U?

21.) Was muss dabei für U gelten?