Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 11
Letztes Blatt

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 16.7.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien A, A' Algebren und $\varphi : A \to A'$ ein Algebrenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Ist U' ein Ideal in A', so ist $U := \{a \in A;\ \varphi(a) \in U'\}$ ein Ideal in A.

(b) Ist φ surjektiv und U ein Ideal in A, so ist $\varphi(U)$ ein Ideal in A'.

(c) Die entsprechende Aussage von (b) ist im allgemeinen falsch, wenn φ nicht surjektiv ist. (**Hinweis:** Geben Sie ein Gegenbeispiel an, denken Sie dabei an $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.)

(d) Es gibt einen Algebrenisomorphismus $A/\ker\varphi \xrightarrow{\cong} \operatorname{im}\varphi$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Zeigen Sie: Die $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{R}[T]/I_p$ mit $p = T^2 + 1 \in \mathbb{R}[T]$ und $I_p = \{q \in \mathbb{R}[T];\ p \text{ teilt } q\}$, ist isomorph zur $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{C}$.
Hinweis: Verwenden Sie dafür Aufgabe 1, Teil (d). Erinnern Sie sich auch an das in Lineare Algebra I, L8.35, Gesagte.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Die Quaternionenalgebra $\mathbb{H}$ erhält man, indem man in der freien $\mathbb{R}$-Algebra $A(B)$ über $B = \{X, Y, Z\}$ das von

$$S = \{X^2 + 1, Y^2 + 1, Z^2 + 1, XYZ + 1\}$$

erzeugte Ideal $U(S)$ ausdividiert: $\mathbb{H} := A(B)/U(S)$. Sei $\pi : A(B) \to \mathbb{H}$ der kanonische Epimorphismus. Wir bezeichnen speziell $i := \pi(X)$, $j := \pi(Y)$, $k := \pi(Z)$.

(a) Zeigen Sie die Multiplikationstabelle für die Multiplikation der Elemente $1, i, j, k$ in $\mathbb{H}$.

(b) Zeigen Sie, dass jedes $u \in \mathbb{H}$ eine eindeutige Darstellung als $u = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ hat.

(c) Zeigen Sie, dass jedes $u \in \mathbb{H}$, $u \neq 0$ invertierbar ist.
(**Hinweis:** Multiplizieren Sie u mit $\bar{u} = \alpha_0 - \alpha_1 i - \alpha_2 j - \alpha_3 k$. Dann schreiben Sie den Inverse von u auf.)

Damit ist $\mathbb{H}$ eine nichtkommutative 4-dimensionale reelle Divisionsalgebra, manchmal „Schiefkörper“ genannt. Diese sogenannten Hamiltonschen Quaternionen treten etwa bei der Beschreibung der Bewegungen eines starren Körpers auf.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Seien V und W K-Vektorräume, und sei $V^* := \operatorname{Hom}(V, K)$ der Dualraum von V. Bestimmen Sie einen Vektorraumisomorphismus

$$F : V^* \otimes W \to \operatorname{Hom}(V, W).$$

Hinweis: Benutzen Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts (ℓ18), eine Basis in V und die zugehörige duale Basis in V^*, vgl. Lineare Algebra I, L15.12, Bem. 2.).

Bitte wenden

Wissensfragen zu l17 bis l20: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist eine freie von B erzeugte kommutative Algebra? Über welche universelle Eigenschaft ist sie eindeutig charakterisiert?

2.) Wie wird diese konstruiert?

3.) Was haben Polynome mit den Unbestimmten B damit zu tun?

4.) Was nennt man ein homogenes Polynom?

5.) Sind Bilder kommutativer Algebren auch immer kommutativ?

6.) Wie wird die Tensoralgebra über einem Vektorraum V definiert?

7.) Welche Räume heißen Tensorräume?

8.) Sind n-lineare Abbildungen durch die Werte auf Basistupel schon eindeutig festgelegt?

9.) Welche universelle Eigenschaft haben Tensorräume (im Zusammenhang mit n-linearen Abbildungen)?

10.) Inwiefern lässt sich jede n-lineare Abbildung also mit einem Umweg über einen Tensorraum beschreiben?

11.) Welchen Raum nennt man das Tensorprodukt von n vielen K-Vektorräumen?

12.) Welche universelle Eigenschaft hat dieses Tensorprodukt?

13.) Inwiefern ist $K^{n\times n}$ das Tensorprodukt $K^n \otimes K^n$?

14.) Was ist eine alternierende n-lineare Abbildung?

15.) Wie wird die äußere Algebra $E(V)$ über einem Vektorraum V konstruiert?

16.) Über welche universelle Eigenschaft ist sie eindeutig charakterisiert?

17.) Was sind die Räume $E_n(V)$?

18.) Über welche universelle Eigenschaft sind sie eindeutig charakterisiert?

19.) Wie konstruiert man die alternierenden n-linearen Abbildungen $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$?

20.) Welche Bedeutung haben die zugehörigen Funktionale $\varphi_{i_1,\ldots,i_n} : E_n(V) \to K$?

21.) Wie kann man die Struktur der $E_n(V)$ beschreiben?

22.) Wie lautet die Verallgemeinerung des Laplaceschen Entwicklungssatzes zur Berechnung von Determinanten?

23.) Wie kann man den Rang einer Matrix mit nichtverschwindenden Unterdeterminanten bestimmen?

24.) Was sind Plücker-Koordinaten?

25.) Wie kann man damit charakterisieren, dass zwei Unterräume einen nichttrivialen Unterraum gemeinsam haben?

26.) Welche Bedeutung hat das $\wedge$-Produkt für die projektive Geometrie?