Dieses Übungs-Blatt bitte generell nicht mit abgeben und nicht einscannen!

Lineare Algebra II – Blatt 3

hhu Düsseldorf
SoSe 2020

Abgabe: bis Donnerstag 14.5.2020, 10:00 Uhr

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAII_SS20/`
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(i) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ eine Drehmatrix ist.

(ii) Bestimmen Sie ferner den Drehwinkel φ und die Drehachse der zugehörigen linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$.

(iii) Geben Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$ so an, dass die Matrixdarstellung von f in (ii) bzgl. B die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{hat.}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(i) Zerlegen Sie die Matrix $(e_3|e_1|e_2|e_5|e_4) \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ in ein Produkt von Spiegelungsmatrizen.

(ii) Berechnen Sie für die folgenden Permutationen $\sigma, \tau \in S_6$, die in Zweizeilenform gegeben sind, die Permutationen $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$ und σ^{33} (**Tipp:** $\sigma^{33} = \sigma \circ \sigma^{32}$).

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(i) Im $\mathbb{R}^3$ sei $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ die Spiegelung an der Ebene $E : n^T x = 0$ für ein $n \in \mathbb{R}^3$ mit $\|n\| = 1$, d. h. E ist die Fixebene (durch 0), die punktweise fest bleibt. Geben Sie in Abhängigkeit von n die Matrix A an, für die $f(x) = Ax$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Im $\mathbb{R}^3$ sei $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ die Projektion auf die Ebene $E : n^T x = 0$ für ein $n \in \mathbb{R}^3$ mit $\|n\| = 1$. Geben Sie in Abhängigkeit von n die Matrix B an, für die $g(x) = Bx$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Berechnen Sie für die Spiegelung des $\mathbb{R}^3$ an der Ebene $E : x - 2y + z = 0$ den Bildpunkt des Punktes mit den Koordinaten $(5, 2, 2)$, sowie die Projektion dieses Punktes auf E.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Geben Sie alle Möglichkeiten für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ an, die in Jordanscher Normalform vorliegt und den einzigen Eigenwert 2 besitzt (bis auf Reihenfolge der Jordanblöcke).

Bitte wenden

Wissensfragen zu l5 und l6: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist eine Permutation?

2.) Warum ist die Menge der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ eine Gruppe? Bezüglich welcher Verknüpfung?

3.) Was ist eine Transposition?

4.) Was ist eine Permutationsmatrix?

5.) Wie kann man das Vorzeichen einer Permutation definieren?

6.) Was sind gerade und ungerade Permutationen?

7.) Warum sind Permutationsmatrizen orthogonale Matrizen, und warum sind Transpositionsmatrizen Spiegelmatrizen?

8.) Warum kann die lineare Abbildung, die durch eine Permutationsmatrix beschrieben wird, als Produkt von Spiegelungen geschrieben werden?

9.) Welche verschiedenen Untergruppen von $O(n)$ kennen Sie?

10.) Wie lautet die Leibniz-Formel zur Berechnung einer Determinanten? Warum ist diese zur praktischen Berechnung einer Determinanten im allgemeinen völlig ungeeignet?

11.) Was ist ein diagonalisierbarer Endo, was ein trigonalisierbarer Endo?

12.) Durch welche Eigenschaft (über Eigenvektoren) ist ein diagonalisierbarer Endo eindeutig charakterisiert?

13.) Geben Sie eine Dreiecksmatrix des $\mathbb{R}^{n\times n}$ an, die nicht diagonalisierbar ist. Warum ist diese nicht diagonalisierbar?

14.) Was sind Hauptvektoren m-ter Stufe? Sind Eigenvektoren auch Hauptvektoren?

15.) Wie kann man Ketten von Hauptvektoren bilden, sobald ein Hauptvektor m-ter Stufe vorliegt?

16.) Wie lautet der Satz von der Jordanschen Normalform bei Existenz einer Basis, die aus lauter Hauptvektorenketten besteht?

17.) Welche Blockform haben Matrizen, die in Jordanscher Normalform vorliegen?