Tutoriumsaufgabenblatt Tag 1

Mengen:

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Kardinalität der folgenden Mengen:
a) $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 4, 6\}$
b) $\{1, 2, 3\} \times \{2, 4, 6\}$
c) $\{\{1, 2, 3\}\} \cup \{\{3, 2, 1\}\}$
d) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \{1, ..., 10\}\} \cap \{\frac{1}{3n} \mid n \in \{1, ..., 10\}\}$
e) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \cup \{1, 2\} \cup \{2, 4\}$

Abbildungen:

Aufgabe 2
Sei $A = \{a_1, a_2\}$ und $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Welche der folgenden Zuordnungen sind Abbildungen?
a) $f : A \to B,\ f(a_1) = b_1,\ f(a_1) = b_2,\ f(a_2) = b_3.$
b) $g : B \to A,\ g(b_1) = a_1,\ g(b_2) = a_2.$
c) $h : B \to A,\ h(b_1) = a_1,\ h(b_2) = a_1,\ h(b_3) = a_2.$
d) $j : A \to B,\ j(a_1) = a_1,\ j(a_2) = a_2.$

Aufgabe 3
Geben Sie Mengen A, B und eine Abbildung $f : A \to B$ mit den folgenden Eigenschaften an:
a) A und B sind endlich und f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
b) A und B sind endlich und f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
c) A und B sind endlich und f ist bijektiv.
d) A und B sind endlich und f ist weder injektiv, noch surjektiv.
e) A und B sind nicht endlich und f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
f) A und B sind nicht endlich und f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
g) A und B sind nicht endlich und f ist bijektiv.
h) A und B sind nicht endlich und f ist weder injektiv, noch surjektiv.

Aufgabe 4
Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:
a) $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$
b) $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \mapsto x^2$
d) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$
e) Was ändert sich in a) - d) wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzt?

Aufgabe 5
Existieren endliche Mengen A, B und C, eine nicht surjektive Abbildung $f : A \to B$ und eine injektive Abbildung $g : B \to C$, sodass die Komposition $g \circ f$ bijektiv ist?
Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie.

Äquivalenzrelationen:

Aufgabe 6
Die Menge E bestehe aus fünf roten Äpfeln, drei Birnen, zwei Bananen, sechs Tomaten und einer Zitrone. Betrachte dazu die Abbildung

$$\text{farbe} : E \to \{\text{rot}, \text{gruen}, \text{gelb}, \text{blau}, \text{schwarzlilagestreift}\},\ a \mapsto \text{farbe}(a),$$

welche einem Element aus E seine Farbe zuordnet. Zeigen Sie, dass durch

$$a \sim b \Leftrightarrow farbe(a) = farbe(b)$$

eine Äquivalenzrelation gegeben ist und bestimmen Sie $E/\sim$.

Gruppen:

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass die Menge $\{f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bildet. Ist diese Gruppe abelsch?

Aufgabe 8
Geben Sie alle Untergruppen von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ an.

Aufgabe 9
Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Geben Sie alle $a \in G$ mit $a+a+a = e$ an.

Aufgabe 10
Existiert ein Isomorphismus $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 11
Seien G und G' Gruppen mit neutralen Elementen e bzw. e' und $f : G \to G'$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie:

a) Es gilt $f(e) = e'$.
b) Es gilt $f(a)^{-1} = f(a^{-1})$ für jedes $a \in G$.
c) Es gilt $Ker(f) = \{e\} \Leftrightarrow f$ injektiv ist.

Ringe und Körper:

Aufgabe 12
Ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ein Ring oder sogar ein Körper?
Begründen Sie.
Aufgabe 13
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(i) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Körper ist.

Aufgabe 14
Sei k ein Körper. Zeigen Sie unter Verwendung der Körperaxiome:
a) Es gilt $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in k$.
b) Es gilt $x(-y) = -(xy)$ für alle $x, y \in k$.
c) Es gilt $2x = x + x$ für alle $x \in k$.

Aufgabe 15
Existiert ein nichttrivialer Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?
Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie.