Tutoriumsaufgabenblatt Tag 2

Vektorräume:

Aufgabe 1
Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume?
a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 4x_3\} \subset \mathbb{R}^3$.
b) $\{(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^3 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
c) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
d) $\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid A \text{ ist in Zeilenstufenform}\} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$.
e) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nennt man 2π-*periodisch*, falls $f(x) = f(x + 2\pi)$.
f) $\{(x_1, x_2) \subset \mathbb{F}_2^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\} \subset \mathbb{F}_2^2$.

Lineare Unabhängigkeit:

Aufgabe 2
Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?
a) $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.
b) $(1, 2, 4)^T, (4, 7, 9)^T, (0, 0, 3)^T$ im $\mathbb{R}^3$.
c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(1, 3, 4)^T, (2, t, 11)^T, (-1, -2, 0)^T$ linear unabhängig?
d) $(7, 4, 9)^T, (1, 1, 2)^T, (0, 3, 8)^T$ im Vektorraum $\mathbb{F}_5^3$.

Basis und Dimension:

Aufgabe 5
a) Geben Sie eine Basis für $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\}$ an.
b) Ergänzen Sie die Vektoren $(1, 0, 0, 2)^T, (0, 1, 1, 0)^T$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.
c) Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum V definieren wir

$$h(V) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt Kette von Untervektorräumen } V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{n-1} \subset V_n\}.$$

Zeigen Sie $h(V) = \dim(V)$.
d) Wie viele Elemente hat ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem endlichen Körper?
e) Zeigen Sie: Ist $b_1, ..., b_n$ eine Basis von V und $f\colon V \to V$ ein Automorphismus, so ist $f(b_1), ..., f(b_n)$ ebenfalls eine Basis von V.
f) Zeigen Sie, dass $(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T, (3, 1, 2)^T$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und tauschen Sie zwei Vektoren aus der Basis gegen die beiden Vektoren $(0, 3, 4)^T, (1, 2, 3)^T$ aus, sodass Sie anschliessend wieder eine Basis erhalten.