Tutoriumsaufgabenblatt Tag 3

Lineare Abbildungen:

Aufgabe 1
Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität:
a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (4x - 2y, 3x)$.
b) Betrachten Sie $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und sei $\mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto x - \sqrt{2}y$.
c) Betrachte $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto 2\bar{z}$.
d) Gibt es lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ welche die Vektoren $(1, 1, 0, 0)^T, (1, 1, 1, 0)^T, (0, 1, 0, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T$ auf $(1, 2, 3)^T, (2, 3, 1)^T, (3, 2, 1)^T$ abbilden?
e) U und U' sind Untervektorräume von V und $\phi\colon U \times U' \to V$, $(a, b) \mapsto a - b$.

Abbildungsmatrizen:

Aufgabe 2
a) Bestimmen Sie für die beiden linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f ist "Drehung um 90 Grad" und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, g ist "Spiegelung an der Geraden $x = y$" jeweils die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis.
b) Es sei K ein Körper. Für welche Körper ist die Abbildung

$$f\colon K \to K^{2\times 2},\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

injektiv? Wann gilt $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$? Was passiert, wenn man $2x$ durch $3x + 1$ ersetzt ?

Lineare Gleichungssysteme:

Aufgabe 3
a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ b = (1, 2, 2)^T$$

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = (1, 2, 2)^T$$

c) Man beweise: Hat ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten in K genau 5 Lösungen, so gilt $K \simeq \mathbb{F}_5$.
d) Man zeige, dass jeder Unterraum $U \subset K^n$ Lösungsraum eines geeigneten homogenen linearen Gleichungssystem ist.
e) Stellen Sie den Vektor $(1,5,7)^T$ als Linearkombination der Vektoren $(2,0,3)^T, (0,6,1)^T, (0,0,5)^T$ dar.
f) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat $Ax = 0$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung?

Arbeiten mit Basen:

Aufgabe 4

a) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen $\mathcal{A} = \{(1,-1,2)^T, (2,3,7)^T, (2,3,6)^T\}$ und $\mathcal{B} = \{(1,2,2)^T, (-1,3,3)^T, (-2,7,6)^T\}$ gegeben. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix ${}_{\mathcal{A}}T_{\mathcal{B}}$.
b) Zeigen Sie, dass für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A \cdot A^T)$. Gilt dies auch, falls $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$?