Tutoriumsaufgabenblatt Tag 5

Bilineare Abbildungen und Skalarprodukte:

Aufgabe 1
Welche der folgenden Abbildungen auf dem K^2 sind bilinear:
a) $\varphi_1(x, y) = (x_1 - y_2)^2$
b) $\varphi_2(x, y) = x_2 y_1 - x_1 y_2$
c) $\varphi_3(x, y) = x_1^2 - x_1 y_2 + y_2^2$
d) $\varphi_4(x, y) = x_1 y_2 + 2$
e) $\varphi_5(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2$

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass auf dem Raum der reellen $m \times n$-Matrizen $\mathbb{R}^{m \times n}$ für zwei Matrizen A, B durch $\langle A, B \rangle = tr(A^t B)$ ein Skalarprodukt gegeben ist. Dabei ist $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ die Spur einer quadratischen Matrix.

Aufgabe 1 (neu)
Wie erhält man mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine bilineare Abbildung? Geben Sie eine Matrix B an, so dass die durch B induzierte bilineare Abbildung ein Skalarprodukt ist.

Aufgabe 2 (neu)
Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:
a) $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
b) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$.

Aufgabe 3 (neu)
Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine symmetrische Matrix. Ist die durch A induzierte bilineare Abbildung automatisch ein Skalarprodukt?

Orthonormalbasen:

Aufgabe 3
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle v_1, v_2 \rangle = v_1^t v_2$ Gibt es zwei normierte, linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, die sich nicht durch einen dritten Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ zu einer Orthonormalbasis ergänzen lassen? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 4 (neu)
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus. Man zeige: Ist $(v_1, ..., v_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$ genau dann, wenn die Abbildungsmatrix A bezüglich der Basis $(v_1, ..., v_n)$ symmetrisch ist.