Inoffizielle Probeklausur
LA I-Nachklausur-Tutorium

Aufgabe 1. *Bestimmen Sie die Kardinalität folgender Mengen:*
a) $\{\{\emptyset\} \cup \{1, 2\}\} \cup \{\{\emptyset\}\}$
b) $\{1, 2\} \times \{a, b\}^3 \times \{1, 2, 3\}$ *Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.*

Aufgabe 2. *Gibt es endliche Mengen* A, B *und* C *und Abbildungen* $f\colon A \to B$ *und* $g\colon B \to C$*, so dass* f *nicht injektiv ist,* g *aber surjektiv und* $g \circ f$ *bijektiv ? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an. Wenn nein, so begründen Sie bitte.*

Aufgabe 3. *Zeigen Sie nur mit Hilfe der Körperaxiome:* $ab = 0$ *genau dann, wenn* $a = 0$ *oder* $b = 0$.

Aufgabe 4. *Bestimmen Sie die Dimension des Bildes folgender linearen Abbildung:* $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x+y, y-x, 0, 2x-3y)$*. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.*

Aufgabe 5. *Gibt es Untervektorräume* $U, U' \subset \mathbb{R}^6$*, mit* $\dim U = 5$, $\dim U' = 2$ *und* $\dim(U \cap U') = 1$ *? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie bitte. Was passiert, wenn Sie* $\dim U' = 3$ *annehmen ?*

Aufgabe 6. *Ist es möglich, dass ein lineares Gleichungssystem mit* 5 *Variablen und* 3 *Gleichungen einen* 3*-dimensionalen Lösungsraum besitzt. Wenn ja, geben Sie ein Beispiel an. Wenn nein, begründen Sie bitte.*

Aufgabe 7. *Seien* U *und* V *Untervektorräume von* $\mathbb{R}^5$*, mit* $U \subset V$*. Seien ferner* $\mathcal{A} = \{u_1, u_2\} \subset U$ *und* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ *linear unabhängige Mengen. Ist es möglich eine Basis von* $\mathbb{R}^5$ *anzugeben, welche mindestens einen Vektor aus* $\mathcal{A}$ *und mindestens einen aus* $\mathcal{B}$ *enthält. Wenn nein, geben Sie ein Beispiel an. Wenn ja, begründen Sie bitte.*

Aufgabe 8. *Sei* $(V, \langle -, - \rangle)$ *ein euklidischer Vektorraum und* $u, v, w \in V$ *Vektoren, so dass jeweils* u *und* v*,* u *und* w *und* v *und* w *senkrecht zueinander sind. Zeigen Sie* $\frac{1}{2}(\|u+v\|^2 + \|v+w\|^2 + \|w+u\|^2) = \|u+v+w\|^2$.

Aufgabe 9. *Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über* $\mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} 4x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 - 2x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.

Aufgabe 10. *Betrachten Sie die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A*.*
b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert eine Basis des jeweiligen Eigenraums.

c) Ist A diagonalisierbar ? Wenn ja, geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.