Aufgabe 1 (1+1 Punkte):

Bestimmen Sie die Kardinalität der folgenden Mengen. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

(a) $\{\{1, 2, 3\}\} \cup \{\{3, 2, 1\}\}$ (b) $\{3, 4\} \times \{5, 6\} \times \{7, 8, 9\}$

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Gibt es endliche Mengen A, B und C und Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$, so dass f nicht surjektiv ist aber g injektiv und die Verknüpfung $g \circ f$ bijektiv? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zeigen Sie nur mit Hilfe der Körperaxiome: In jedem Körper K gilt: $2 \cdot x = x + x$. Hierbei ist 2 definiert als $1 + 1$ (wobei 1 das multiplikative neutrale Element ist). Geben Sie in jedem Schritt an, welche Axiome Sie verwenden.

Zur Erinnerung:

- Die Körperaxiome sind: $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen; Distributivität ($a(b + c) = ab + ac$ und $(a + b)c = ac + bc$).
- Die Axiome einer abelschen Gruppe $(G, \circ)$ sind: Assoziativität ($a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$); Exitenz eines neutralen Elements e ($a \circ e = e \circ a = a$); Existenz inverser Elemente a^{-1} ($a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$); Kommuativität ($a \circ b = b \circ a$).

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Bestimmen Sie die Dimension vom Kern der linearen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, 0, y - x, 2x - 2y)$. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Gibt es Untervektorräume U_1, U_2, U_3 und U_4 von $\mathbb{R}^3$ mit $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq U_4 \subsetneq \mathbb{R}^3$? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel solcher Räume U_1, U_2, U_3, U_4 an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Kann ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit drei verschiedenen Gleichungen und drei Variablen mehrere Lösungen haben? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 7 (2 Punkte):

Gibt es drei verschiedene Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^3$ so dass v_1, v_2 linear unabhängig sind, v_2, v_3 auch linear unabhängig aber v_1, v_3 linear abhängig? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel solcher Vektoren v_1, v_2, v_3 an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 8 (2 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standard-Skalarprodukt ($\langle u, v\rangle = u^T v$ für $u, v \in \mathbb{R}^3$). Gibt es zwei normierte, linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$, die sich nicht durch einen dritten Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$ zu einer Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3 ergänzen lassen? Wenn ja, geben Sie solche Vektoren v_1, v_2 an und begründen Sie, dass sie sich nicht zu einer Orthonormalbasis ergänzen lassen. Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 9 (3 Punkte):

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.

Aufgabe 10 (2+2+2 Punkte):

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Geben Sie zu jedem Eigenwert einen konkreten Eigenvektor an.

(c) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. (Sie brauchen nicht S^{-1} zu bestimmen.) Wenn nein, begründen Sie.

Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.