Aufgabe 1 (1+1 Punkte):

Bestimmen Sie die Kardinalität der folgenden Mengen. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

(a) $\{2, \{2\}, \{2, \{2\}\}\} \cup \{\{2\}\}$

(b) $\mathrm{Abb}(\{1, 2\}, \{3, 4\})$

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Gibt es endliche Mengen A, B und C und Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$, so dass g nicht injektiv ist, aber f surjektiv und die Verknüpfung $g \circ f$ bijektiv? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Bestimmen Sie den Rang von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, x + y + z, 2y + z, 2x + z)$. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Gibt es Untervektorräume $U_1, U_2, U_3, U_4 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq U_4$? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel solcher Räume U_1, U_2, U_3, U_4 an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Kann ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ genau zwei Lösungen haben? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 6 (2 Punkte):

Gibt es drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^2$ so dass v_1, v_2 linear unabhängig sind, v_2, v_3 auch linear unabhängig und v_1, v_3 auch linear unabhängig? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel solcher Vektoren v_1, v_2, v_3 an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 7 (2 Punkte):

Gibt es ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, so dass $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, $\langle v_1, v_3\rangle = 0$ und $\langle v_2, v_3\rangle = 0$? Wenn ja, geben Sie ein solches Skalarprodukt und solche Vektoren an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 8 (3 Punkte):

Zeigen Sie nur mit Hilfe der Körperaxiome: Ist K ein Körper, in dem $((1 + 1) + 1) + 1 = 0$, gilt, so gilt auch $1 + 1 = 0$. Geben Sie in jedem Schritt an, welche Axiome Sie verwenden.

Zur Erinnerung:

- Die Körperaxiome sind: $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ sind abelsche Gruppen; Distributivität ($a(b + c) = ab + ac$ und $(a + b)c = ac + bc$).
- Die Axiome einer abelschen Gruppe $(G, \circ)$ sind: Assoziativität ($a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$); Existenz eines neutralen Elements e ($a \circ e = e \circ a = a$); Existenz inverser Elemente a^{-1} ($a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$); Kommutativität ($a \circ b = b \circ a$).

Aufgabe 9 (3 Punkte):

Bestimmen Sie die Inverse der folgenden Matrix (über $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.

Aufgabe 10 (2+2+1 Punkte):

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Geben Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des zugehörigen Eigenraums an.

(c) Ist A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, geben Sie außerdem eine Diagonalmatrix A' an, die zu A ähnlich ist (d. h. so dass es ein S gibt mit $A' = S^{-1}AS$; Sie brauchen S nicht anzugeben.).

Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.