....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe Zusammengearbeitet mit

Lineare Algebra I – Blatt 11

Abgabe am 18.1.2017 in der Vorlesung

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Im Folgenden arbeiten wir über dem Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(a) Wie viele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem mit der folgenden erweiterten Matrix?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \end{array}\right)$$

Listen Sie alle Lösungen auf.

(b) Im Allgemeinen: Wie viele Lösungen kann ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$ mit drei Gleichungen und drei Variablen haben? Begründen Sie.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, beide vom Rang 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Summe $A + B$ Rang 0, 1 oder 2 haben kann, indem Sie jeweils ein Beispiel angeben.

(b) Zeigen Sie, dass der Rang der Summe $A + B$ nicht größer als 2 sein kann.

Aufgabe 3 (1+1+2 Punkte):

Bestimmen Sie den Rang der folgenden $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \cdots & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}$

Anleitung: Wenn Sie (vor allem bei (c)) keine Idee haben, wie Sie den Rang bestimmen können, probieren Sie es erst mal für kleine n, z. B. $n = 4$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ eine Basis von V. Wir verwenden die Notationen aus Abschnitt 4.4 der Vorlesung.

(a) Seien $v_1', v_2' \in V$ gegeben durch ${}_{\mathcal{B}}[v_1'] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ${}_{\mathcal{B}}[v_2'] = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (v_1', v_2')$ auch eine Basis von V ist.

(b) Sei $v \in V$ gegeben durch ${}_{\mathcal{B}'}[v] = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Drücken Sie v in der Basis $\mathcal{B}$ aus, d. h. bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}}[v]$.

(c) Sei $w \in V$ gegeben durch ${}_{\mathcal{B}}[w] = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Drücken Sie w in der Basis $\mathcal{B}'$ aus, d. h. bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}'}[w]$.

(d) Sei $f\colon V \to V$ die lineare Abbildung, die gegeben ist durch ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{B}'}$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1]Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.