....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

....
Gruppe Zusammengearbeitet mit

Lineare Algebra I – Blatt 12

Abgabe am 25.1.2017 in der Vorlesung

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (1+1+2 Punkte):

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \\ h & i & 0 & j \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Hinweis zu (a) und (b): Mit geschickten Zeilen- und/oder Spaltentransformationen können Sie viel Rechenarbeit sparen.

Hinweis zu (c): Sie können z. B. damit anfangen, die letzte Spalte von allen anderen Spalten abzuziehen.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

(a) Seien $A, B \in \mathbb{F}_5^{9\times 9}$ mit $\det A = \bar{3}$ und $\det B = \bar{2}$. Bestimmen Sie $\det(AB^{-1}A)$.

(b) Für welche Paare von Zahlen $r = 0, 1, 2, 3$ und $d = 0, 1, 2, 3$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\operatorname{rk} A = r$ und $\det A = d$? Begründen Sie.

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ invertierbar?

Hinweis: Berechnen Sie $\det A$.

Aufgabe 3 (5 Punkte):

Man nennt eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ *schiefsymmetrisch*, wenn gilt: $A = -A^T$.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine schiefsymmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, die sowohl eine 1 als auch eine 2 als Einträge hat (an beliebigen Stellen). Wie groß muss n dafür mindestens sein?

(b) Welche reellen Zahlen kommen als Determinanten von schiefsymmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ vor?

(c) Zeigen Sie im Fall $K = \mathbb{R}$: Ist A schiefsymmetrisch und n ungerade, so ist $\det A = 0$.
Hinweis: In der Vorlesung gab es einen Satz über $\det(A^T)$. Außerdem dürfen Sie Aufgabe 4 (a) verwenden (selbst wenn Sie sie nicht lösen).

(d) Geben Sie im Fall $K = \mathbb{F}_2$ eine schiefsymmetrische Matrix $A \in K^{3\times 3}$ mit $\det A \neq 0$ an.
Hinweis: Was ist $-\bar{1}$ in $\mathbb{F}_2$?

(e) Gilt (c) über $K = \mathbb{F}_3$? (D. h. gibt es, für ungerade n, schiefsymmetrische Matrizen A über $K = \mathbb{F}_3$ mit $\det A \neq 0$?)

Aufgabe 4 (1+3 Punkte):

Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in K^{n\times n}$ und $r \in K$, so ist $\det(rA) = r^n \cdot \det A$.

(b)

$$\det \begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = b \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Ein Ansatz besteht darin, sich zu überlegen, welche Summanden der Leibniz-Formel ungleich 0 sind. Alternativ können Sie mit Zeilen- und/oder Spaltentransformationen argumentieren.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.