.................................................
Name und Matr-Nr. (a)

.................................................
Name und Matr-Nr. (b)

# Lineare Algebra I – Blatt 2

Abgabe am 2.11.2016 in der Vorlesung

| 1 | 2 | 3 | 4 | B[1] | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | (a) | |
| | | | | (b) | |

........... ..........................................................................................................................
Gruppe Zusammengearbeitet mit

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

**Aufgabe 1 (4 Punkte):**

In welchen der folgenden Fälle ist $G$ der Graph einer Funktion von $A$ nach $B$? Und wenn $G$ der Graph einer Funktion ist, bestimmen Sie, ob die Funktion injektiv, ob sie surjektiv und ob sie bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

1. $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $G = A \times B$.
2. $A = \{0, 8, 15\}$, $B = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$, $G = \{(0, \frac{1}{2}), (8, \frac{1}{5}), (15, \frac{1}{5})\}$
3. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $G = \{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$, $G = \{(2n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

**Aufgabe 2 (4 Punkte):**

Hier ist ein Satz und ein (sehr ausführlich aufgeschriebener) Beweis:

> **Satz.** Für beliebige Mengen $A$, $B$ und $C$ gilt: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
>
> *Beweis:* Setze $L := (A \cap B) \cup C$ und $R := (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Wir müssen zeigen: Für jedes $x$ gilt: $x \in L$ gdw. $x \in R$.
>
> Wir machen eine Fallunterscheidung danach, ob $x$ in $C$ liegt oder nicht.
>
> Fall 1: $x \in C$.
>
> Dann ist $x \in L$ (nach Definition von $\cup$). Außerdem ist $x \in A \cup B$ und $x \in B \cup C$ (auch nach Definition von $\cup$), und damit $x \in R$ (nach Definition von $\cap$).
>
> In diesem Fall gilt also insbesondere: $x \in L$ gdw. $x \in R$.
>
> Fall 2: $x \notin C$.
>
> Dann gilt nach Definition von $\cap$: $x \in L \iff x \in A \cap B$; also ist $x \in L$ gdw. $x \in A$ und $x \in B$ (nach Definition von $\cap$).
>
> Außerdem: $x \in R$ gdw. $x \in A \cup C \vee x \in B \cup C$ (nach Definition von $\cap$). Da $x \notin C$, ist das (nach Definition von $\cup$) äquivalent zu: $x \in A \vee x \in B$.
>
> Also gilt auch in Fall 2: $x \in L$ gdw. $x \in R$. □

In dem Beweis sind aber vier mathematische Tippfehler (d. h. vier falsche Symbole oder falsche Variablen). Finden Sie diese.

**Aufgabe 3 (4 Punkte):**

1. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
2. Gibt es eine Funktion von $\{1, 2, 3\}$ nach $\{1, 2, 3\}$, die injektiv aber nicht surjektiv ist? Geben Sie ein Beispiel an oder begründen Sie kurz, warum es eine solche Funktion nicht gibt.

**Aufgabe 4 (4 Punkte):**

Zeigen Sie: Sind $f: A \to B$ und $g: B \to C$ injektive Funktionen, so ist auch die Verknüpfung $g \circ f$ injektiv.

Damit Sie wissen, wie ausführlich so ein Beweis sein soll, ist hier eine Beispiellösung für eine Variante dieser Aufgabe:

Beispiel-Aufgabe: Zeigen Sie: Sind $f: A \to B$ und $g: B \to C$ surjektive Funktionen, so ist auch die Verknüpfung $g \circ f$ surjektiv.

Beispiel-Lösung: Zu zeigen: Für jedes $c \in C$ existiert ein $a \in A$ mit $g(f(a)) = c$. Sei also $c$ gegeben. Da $g$ surjektiv ist, gibt es ein $b \in B$ mit $g(b) = c$. Da $f$ surjektiv ist, gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Dies ist das gesuchte $a$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.