.... Name und Matr-Nr. (a)

.... Name und Matr-Nr. (b)

.... Gruppe

.... Zusammengearbeitet mit

Lineare Algebra I – Blatt 5

Abgabe am 23.11.2016 in der Vorlesung

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ seien a_n reelle Zahlen, für die folgendes gilt:

$a_1 = 1$; und $a_{n+1} \cdot (a_n + 1) = a_n$ für alle $n \geq 1$.

Zeigen Sie per Induktion über n, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{n}. \tag{$\star$}$$

Anleitung: „Per Induktion über n" zeigen bedeutet, dass Sie folgendes zeigen müssen:

- Die Aussage $(\star)$ gilt für $n = 1$ (Induktionsanfang).
- Wenn die Aussage $(\star)$ für ein (beliebiges gegebenes) n gilt, dann gilt sie auch für $n + 1$ (Induktionsschluss).

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Zeigen Sie: Die Menge $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper. Genauer:

(a) Machen Sie eine Liste der Dinge, die dazu geprüft werden müssen.

(b) Welche Einträge Ihrer Liste folgen direkt daraus, dass $\mathbb{R}$ ein Ring ist? (Zu diesen Einträgen brauchen sie nichts weiter zu schreiben.)

(c) Prüfen Sie, dass auch die restlichen Dinge Ihrer Liste zutreffen.

Hinweis: Bei einem Bruch $\frac{1}{a+b\sqrt{2}}$ kann man die Wurzel im Nenner loswerden, indem man mit $a - b\sqrt{2}$ erweitert. (Könnte $a - b\sqrt{2} = 0$ sein? Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.)

Aufgabe 3 (5 Punkte):

(a) Lässt sich das Polynom $2 + x^2 \in \mathbb{R}[x]$ als Produkt von zwei linearen Polynomen $f, g \in \mathbb{R}[x]$ schreiben?

(b) Gibt es lineare Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x]$ mit $f \cdot g = 2 + x^2$?

(c) Geben Sie ein Polynom $h \in \mathbb{F}_5[x]$ vom Grad 2 an, das keine Nullstelle hat.

(d) Geben Sie ein Polynom in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[x]$ vom Grad 2 an, das 3 verschiedene Nullstellen besitzt.

(e) Geben Sie einen kommutativen unitären Ring R und ein Polynom $f \in R[x]$ vom Grad 1 an, das keine Nullstelle (in R) hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei K ein Körper und A eine nicht-leere Menge. Es soll gezeigt werden, dass $V := \mathrm{Abb}(A, K)$ mit den folgenden Verknüpfungen ein K-Vektorraum ist:

Für $f, g \in V$ ist $f + g$ gegeben durch: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ für alle $a \in A$.

Für $r \in K$ und $f \in V$ ist $r \cdot f$ gegeben durch: $(r \cdot f)(a) = r \cdot f(a)$ für alle $a \in A$.

(a) Machen Sie eine Liste der Dinge, die zu überprüfen sind.

(b) Überprüfen Sie diese Dinge. Sie dürfen auf Aufgabe 3 (a) von Blatt 4 verweisen, falls manche Dinge dort schon geprüft wurden.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.