....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

Lineare Algebra I – Blatt 6

Abgabe am 30.11.2016 in der Vorlesung

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

.... Gruppe .... Zusammengearbeitet mit

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$?

(a) $B_1 := \{\begin{pmatrix} 2a \\ 3a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$

(b) $B_2 := \{\begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$

(c) Falls B_1 bzw. B_2 kein Untervektorraum ist: Geben Sie den Span $\langle B_1\rangle_{\mathbb{R}}$ bzw. $\langle B_2\rangle_{\mathbb{R}}$ an.

Wir fassen jetzt $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auf (mit der üblichen Addition als Vektoraddition und der üblichen Multiplikation als Skalarmultiplikation). Welche der folgenden Mengen sind in diesem Sinne Untervektorräume von $\mathbb{R}$?

(d) $B_3 := \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

(e) $B_4 := \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$

(f) Falls B_3 bzw. B_4 kein Untervektorraum ist: Geben Sie den Span $\langle B_3\rangle_{\mathbb{Q}}$ bzw. $\langle B_4\rangle_{\mathbb{Q}}$ an.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

(a) Ist $\mathbb{R}^2$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$? (Die Frage ist nicht, ob man $\mathbb{R}^2$ irgendwie als Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ auffassen kann, sondern ob es ein Unterraum ist, wenn man sich genau an die Definitionen hält.)

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ an, die abgeschlossen ist unter Skalarmultiplikation mit Elementen von $\mathbb{R}$ aber nicht unter Vektoraddition.

(c) Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ an, die abgeschlossen ist unter Vektoraddition aber nicht unter Skalarmultiplikation mit Elementen von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (1+1+1+2 Punkte):

Welche der folgenden Mengen A_i von Vektoren in $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig?

(a) $A_1 := \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

(b) $A_2 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

(c) $A_3 := \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

(d) Wenn A_i linear abhängig ist: Geben Sie alle Teilmengen A' von A_i an, die linear unabhängig sind und für die $\langle A'\rangle_{\mathbb{R}} = \langle A_i\rangle_{\mathbb{R}}$ gilt.

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v \in V$. Zeigen Sie:

(a) $(-1) \cdot v = -v$.
(Erleuterung: Mit „1“ ist das neutrale Element der Multiplikation in K gemeint, und das Minus davor bedeutet: additives Inverses davon in K. Im Gegensatz dazu bedeutet das Minus vor dem v: Inverses von v bezüglich der Vektoraddition in V.)

(b) $\{r \cdot v \mid r \in K\}$ ist ein Untervektorraum von V.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.