....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

Lineare Algebra I – Blatt 7

Abgabe am 7.12.2016 in der Vorlesung

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

....

Gruppe Zusammengearbeitet mit

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (1+1+2+1 Punkte):

Sei

$$A := \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subset \mathbb{R}^3$$

und $U := \langle A \rangle_{\mathbb{R}}$ der von A erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

(a) Wie viele Vektoren aus A kann eine Basis von $\mathbb{R}^3$ höchstens enthalten?

(b) Geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die möglichst viele Vektoren aus A enthält.

(c) Gibt es eine Basis von U, die keine Vektoren aus A enthält? Gibt es eine Basis von U, dir nur Vektoren aus A enthält? Wenn ja, geben Sie jeweils eine an.

(d) Auf wie viele Arten lässt sich der Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Vektoren aus A schreiben?

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Wir betrachten den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $V = (\mathbb{F}_2)^2$. (Zur Erinnerung: $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

(a) Wie viele Elemente hat V?

(b) Geben Sie alle Teilmengen von V an, die eine Basis von V bilden.

Aufgabe 3 (1+2+2 Punkte):

Geraden kann man auf etliche verschiedene Arten mit Vektorräumen in Verbindung bringen. Wie betrachten die Gerade G, die durch $y = 1 + \frac{1}{2}x$ gegeben ist: Man kann sie (1) als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ auffassen, (2) als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ oder (3) als Element eines Quotientenvektorraums $\mathbb{R}^2/U$.

Die Menge der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ fassen wir als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf mit „punktweiser Addition und Multiplikation", d. h. Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind so wie auf Blatt 5, Aufgabe 4 definiert.

(a) Geben Sie einen Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^2$ an, so dass G ein Element von $\mathbb{R}^2/U$ ist. Ist Ihre Lösung die einzige Möglichkeit oder gibt es noch andere $U' \subset \mathbb{R}^2$ mit $G \in \mathbb{R}^2/U'$?

(b) In welchen der Auffassungen (1)–(3) macht „$G + G$" Sinn? Dort, wo es Sinn macht: Bestimmen Sie $G + G$.

(c) In welchen der Auffassungen (1)–(3) macht $\langle G \rangle_{\mathbb{R}}$ Sinn? Dort, wo es Sinn macht: Bestimmen Sie $\langle G \rangle_{\mathbb{R}}$.

(Anmerkung: Bei (b) kann man in einem Fall geteilter Meinung sein. Beide Antworten werden akzeptiert, sofern Sie sie begründen.)

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Ist K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sind $A, B \subset V$ Teilmengen, so gilt: $\langle A \cup B \rangle_K = \langle A \rangle_K + \langle B \rangle_K$.

(b) Ist K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sind $A, B \subset V$ Teilmengen, so gilt: $\langle A \cap B \rangle_K = \langle A \rangle_K \cap \langle B \rangle_K$.

Anmerkung: Um rauszufinden, ob eine solche Aussage wahr ist, ist es hilfreich, sich konkrete Beispiele zu überlegen. Wenn Sie ein Gegenbeispiel finden, reicht es, dieses Gegenbeispiel anzugeben, um die Aussage zu widerlegen. Um eine solche Aussage zu zeigen müssen Sie jedoch begründen, dass sie *immer* wahr ist (d. h. für alle K, V, A und B).

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.