....
Name und Matr-Nr. (a)

....
Name und Matr-Nr. (b)

Lineare Algebra I – Blatt 8

Abgabe am 14.12.2016 in der Vorlesung

1	2	3	4	B[1]	Σ
				(a)	
				(b)	

....
Gruppe Zusammengearbeitet mit

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Alle Antworten sind zu begründen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie die entsprechenden Nummern an.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

In jedem der folgenden Fälle: Bestimmen Sie, ob es keine, eine oder mehrere lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt. Wenn es mehrere gibt, reicht es, wenn Sie ohne weitere Begründung zwei Beispiele angeben.

(a) $f_1(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $f_1(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(b) $f_2(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $f_2(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ und $f_2(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

(c) f_3 ist nicht injektiv und $f_3(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

(d) $f_4(\{\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$

(e) $f_5(\{\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}) = \{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$

(f) $f_6(\{\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\})$ ist ein einziger Punkt in $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren und sei $f\colon K^n \to V$ die Abbildung, die e_i auf v_i abbildet für $i = 1, \dots, n$ (wobei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von K^n ist; siehe Beispiel 3.4.2 aus der Vorlesung). Zeigen Sie:

(a) f ist injektiv genau dann wenn $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.

(b) f ist surjektiv genau dann wenn $\langle v_1, \dots, v_n\rangle_K = V$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Bestimmen Sie die Dimension der folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräume:

(a) $\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

(b) $\mathbb{R}^4/U$, wobei $U = \{\begin{pmatrix}a\\a\\0\\0\end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\mathbb{C}$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst mit der normalen Addition als Vektoraddition und der normalen Multiplikation als Skalarmultiplikation).

(d) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst wie auf Blatt 5, Aufgabe 4).

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei K ein Körper und seien U und V endlich-dimensionale K-Vektorräume. In Satz und Definition 3.1.4 wurde die direkte Summe $U \oplus V$ definiert. Zeigen Sie: $\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V$.

Ein möglicher Lösungsweg: Wählen Sie Basen von U und V und konstruieren Sie daraus eine Basis von $U \oplus V$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1617/

[1] Bonuspunkt: Wenn Sie eine Frage zum Inhalt der Vorlesung gestellt haben und Sie diese samt Antwort (kurz) aufschreiben, bekommen Sie einen Bonuspunkt. Bitte geben Sie auch an, *wo* (Vorlesung/Tutorium/Übung/Sprechstunde), *wem* und *wann* Sie die Frage gestellt haben. Bei Abgabe zu zweit auch: *Wer* hat die Frage gestellt bzw. wer hat welche der Fragen gestellt.