Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2016/17
21.12.2016

Probeklausur, vollständig (zum gesamten Stoff)

Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig. (Kleinste Unterschiede in der Aufgabenstellung können zu ganz anderen Lösungen führen.) Wenn nicht anders angegeben, dürfen Sie bei Begründungen und Beweisen auf Sätze aus der Vorlesung verweisen („Nach der Vorlesung gilt xxxxx“).

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Kardinalität der folgenden Mengen. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.
(a) $\emptyset \cup \{1,2\} \cup \{\{1,2\}\}$
(b) $\{n+m \mid n \in \{1,3,4\} \wedge m \in \{1,4\}\}$

Aufgabe 2:

Gibt es endliche Mengen A, B und C und Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$, so dass f nicht surjektiv ist, g nicht injektiv aber die Verknüpfung $g \circ f$ bijektiv? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie nur mit Hilfe der Körperaxiome: In jedem Körper K gilt: $(-1)\cdot(-1) = 1$. (Hierbei ist „-1“ das additive Inverse vom multiplikativen neutralen Element 1.)

Zur Erinnerung:

- Die Körperaxiome sind: $(K,+)$ und $(K \setminus \{0\},\cdot)$ sind abelsche Gruppen; Distributivität ($a(b+c) = ab+ac$ und $(a+b)c = ac+bc$).
- Die Axiome einer abelschen Gruppe $(G,\circ)$ sind: Assoziativität ($a\circ(b\circ c) = (a\circ b)\circ c$); Exitenz eines neutralen Elements e ($a\circ e = e\circ a = a$); Existenz inverser Elemente a^{-1} ($a\circ a^{-1} = a^{-1}\circ a = e$); Kommuativität ($a\circ b = b\circ a$).

Aufgabe 4:

Gibt es drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^3$ so dass v_1, v_2 linear abhängig sind, v_2, v_3 auch linear abhängig aber v_1, v_3 linear unabhängig? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 5:

Gibt es Untervektorräume U und U' von $\mathbb{R}^5$ mit $\dim U = 4$, $\dim U' = 3$ und $\dim(U \cap U') = 1$? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Dimension von $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 7:

Kann ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit zwei Gleichungen und drei Variablen genau eine Lösung haben? Wenn ja, geben Sie eins an (keine weitere Begründung notwendig). Wenn nein, begründen Sie.

Aufgabe 8:

Bringen Sie die folgende erweiterte Matrix (über $\mathbb{R}$) zunächst in Zeilenstufenform und dann in Normalform:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

(Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.)

Aufgabe 9:

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert die Dimension des zugehörigen Eigenraums.

(c) Lässt sich jeder Vektor von $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von Eigenvektoren von A schreiben? Wenn ja, begründen Sie. Wenn nein, geben Sie einen Vektor an, der sich nicht als solche Linearkombination schreiben lässt.

(Schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf.)

Aufgabe 10:

Gibt es ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, so dass für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\langle v, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle = \langle v, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle$? Wenn ja, geben Sie ein solches Skalarprodukt an und begründen Sie, dass es diese Eigenschaft erfüllt. Wenn nein, begründen Sie, dass es keins gibt.

Anmerkungen:

Ich habe zwar versucht, die Aufgaben der Probeklausur ähnlich schwer zu machen wie die der Klausur, aber garantieren kann ich dafür natürlich nicht.

Wenn Sie finden, dass Aufgaben unklar formuliert sind, freue ich mich über Rückmeldungen (so dass die Unklarheiten bei den eigentlichen Klausuren beseitigt werden können).