Lineare Algebra I – Kurzskript

Immanuel Halupczok

Inhaltsverzeichnis

0 Die Sprache der Mathematik

Konvention 0.1 *„A* ***oder*** *B" bedeutet „A oder B oder beides". (Wenn beides verboten sein soll, sage das explizit.)*

Beispiel 0.2 *Jede rationale Zahl ist kleiner als 4 oder größer als 3.*

Beispiel 0.3 *"n ist eine Quadratzahl oder durch 3 teilbar.": Wahr für* $n = 4$*,* $n = 6$*,* $n = 9$*; nicht wahr für* $n = 7$*.*

Konvention 0.4 ***„Es gibt ein*** *XXX" bedeutet „Es gibt ein oder mehrere XXX". (Wenn mehrere XXX ausgeschlossen werden soll, sage „Es gibt genau ein XXX")*

Beispiel 0.5 *Es gibt eine ganze Zahl, deren Quadrat 9 ist. (Es gibt sogar zwei, nämlich* 3 *und* -3*.)*

Beispiel 0.6 *Es gibt genau eine ganze Zahl, deren dritte Potenz 8 ist.*

Konvention 0.7 *Buchstaben (oder andere Symbole) können als Platzhalter für mathematische Objekte (wie Zahlen) verwendet werden. So verwendete Buchstaben heißen* ***Variablen****.*

Beispiel 0.8 *Es gibt genau eine ganze Zahl* z *mit* $z^3 = 8$*.*

Beispiel 0.9 *Für jede rationale Zahl* r *gilt:* $r < 4$ *oder* $r > 3$*.*

Konvention 0.10 *„****Sei*** x *YYY" bedeutet: Wir nehmen im Folgenden an, dass* x *YYY ist. Insbesondere:*

- *„Sei* x *ein ZZZ" bedeutet: Wir nehmen im Folgenden an, dass* x *ein beliebiges ZZZ ist.*
- *„Sei* $x =$ *ZZZ" bedeutet: Wir nehmen im Folgenden an, dass* x *den Wert ZZZ hat.*
  Oft schreibt man auch „Sei $x :=$ *ZZZ" oder einfach nur „*$x :=$ *ZZZ".*

Beispiel 0.11 *Seien* a *und* b *reelle Zahlen. Dann gilt* $a + b = b + a$*.*

Beispiel 0.12 *Sei* n *eine natürliche Zahl und sei* $m := 2n$*. Dann ist* m *durch* n *teilbar.*

Beispiel 0.13 *Seien* m *und* n *teilerfremde natürliche Zahlen. Dann sind* m *und* $m + n$ *auch teilerfremd.*

Konvention 0.14 *„****Wenn*** *A* ***dann*** *B" ist gleichbedeutend mit: „B ist wahr oder A ist falsch." Man sagt auch: „A* ***impliziert*** *B" oder „Aus A* ***folgt*** *B".*

Beispiel 0.15 *Für alle reellen Zahlen* x *gilt:* $\underbrace{\text{Wenn } x > 2 \text{ ist, dann ist } x^2 > 4.}_{(*)}$

(Die Gesamtbehauptung ist, dass die Teilaussage $(*)$ *für alle* x *wahr ist.)*

Konvention 0.16 *„A* ***genau dann wenn*** *B" bedeutet: „Wenn A dann B und wenn B dann A". Man sagt auch: „A und B sind* ***äquivalent****."*

Beispiel 0.17 *Für jede natürliche Zahl n gilt: n ist durch 10 teilbar genau dann wenn die letzte Ziffer 0 ist.*

Notation 0.18 *Sind A und B Aussagen, so bedeutet:*

- ***Disjunktion**: „$A \vee B$“: A oder B (von: lateinisch „vel“)*
- ***Konjunktion**: „$A \wedge B$“: A und B*
- ***Negation**: „$\neg A$“: A ist falsch*
- ***Implikation**: „$A \Rightarrow B$“ oder „$A \Leftarrow B$“: wenn A dann B*
- *„$A \iff B$“: A genau dann wenn B*
- ***All-Quantor**: „$\forall x\colon A$“: Für alle x gilt A*
- ***Existenz-Quantor**: „$\exists x\colon A$“: Es gibt ein x so dass A gilt.*

Beispiel 0.19 *Ist A die Aussage „Jede natürliche Zahl ist durch x teilbar“, so besagt $\neg A$: „Es gibt eine natürliche Zahl, die nicht durch x teilbar ist.“*

Konvention 0.20 *Klammerung und Bindungsstärke:*

- *Verwende nur runde Klammern zum klammern.*
- *„$\cdot$“ bindet stärker als „$+$“ und „$-$“ („Punkt vor Strich“)*
- *$\wedge$ bindet stärker als $\vee$, und $\neg$ bindet noch stärker.*
- *$\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\iff$ binden schwächer als $\vee$, und mehrere in einer Reihe haben eine spezielle Bedeutung: $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ bedeutet: A impliziert B und B impliziert C.*

1 Mathematische Grundbegriffe

1.1 Mengen

Definition 1.1.1 *Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von mathematischen Objekten, die **Elemente** von M genannt werden. Für „x ist ein Element von M“ sagen wir auch „M **enthält** x“ oder „x **liegt in** M“; Notation dafür: $x \in M$. Für „x liegt nicht in M“ schreibt man: $x \notin M$.*

Eine Menge wird dadurch charakterisiert, welche Elemente sie enthält, d. h. zwei Mengen M, N sind gleich ($M = N$) genau dann wenn für alle mathematischen Objekte x gilt: $x \in M \iff x \in N$.

Eine Menge kann auch nur ein Element oder gar kein Element haben. Eine Menge mit nur einem Element x wird nicht *als das gleiche angesehen wie x selbst.*

Mengen werden selbst wieder als mathematische Objekte angesehen und können deshalb Elemente von (anderen) Mengen sein.

Notation 1.1.2 *Ist n eine natürliche Zahl und sind $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ beliebige mathematische Objekte, so schreiben wir $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ für die Menge, die diese Objekte (und keine anderen) enthält. Die **leere Menge** $\{\}$ (d. h. die Menge, die keine Elemente hat), wird auch mit $\varnothing$ bezeichnet.*

Konvention 0.21 *Als Variable kann man auch einen Buchstaben mit einem mathematischen Objekt als Index verwenden; für jeden Index wird dies als eigene Variable angesehen.*

Beispiel 0.22 *$x, x_1, x_2, x_3, x_{\frac{1}{2}}$ sind lauter verschiedene Variablen.*

Beispiel 1.1.3 *$x \in \{1, 4, 6\}$ genau dann wenn $x = 1$ oder $x = 4$ oder $x = 6$.*

Beispiel 1.1.4 *$x \in \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ genau dann wenn $x = 1$ oder $x = 2$ oder $\dots$ oder $x = 7$.*

Konvention 1.1.5 *„Die Menge der XXX" bedeutet: die Menge, die alle XXX enthält (und sonst nichts).*

Beispiel 1.1.6 *Die Menge der* ***natürlichen Zahlen*** *(inklusive 0): $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$*

Beispiel 1.1.7 *Die Menge der* ***ganzen Zahlen****: $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \quad -1, -2, -3, \dots\}$*

Beispiel 1.1.8 *Die Menge der* ***rationalen Zahlen****: $\mathbb{Q}$*

Beispiel 1.1.9 *Die Menge der* ***reellen Zahlen*** *$\mathbb{R}$*

Konvention 0.23 *Sei M eine Menge.*
„$\forall x \in M\colon \dots$" bedeutet: „Für alle Elemente von M gilt $\dots$"
„$\exists x \in M\colon \dots$" bedeutet: „Es gibt ein (mindestens) Element von M, für das $\dots$ gilt."

Notation 1.1.10 *Ist A eine Aussage über eine Variable x, so bezeichnet $\{x \mid A\}$ die Menge, der Objekte, für die A gilt.*

Ist außerdem M eine Menge, so bezeichnet $\{x \in M \mid A\}$ die Menge der Objekte, die in M liegen und für die A gilt.

Ist C ein Ausdruck in einer Variablen x und A eine Aussage über x, so bezeichnet $\{C \mid A\}$ die Menge der Werte, die der Ausdruck annimmt, wenn man für x Objekte einsetzt, auf die A zutrifft.

Beispiel 1.1.11 *Die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen: $\mathbb{R}_{\geqslant 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.*

Beispiel 1.1.12 *$\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ist die Menge der Quadratzahlen.*

Definition 1.1.13 *Eine Menge A heißt* ***endlich****, wenn sich A schreiben lässt als $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ für eine natürliche Zahl n und für Objekte $x_1, \dots, x_n$. Ist A endlich, so bezeichnet "$\#A$" für die Anzahl der Elemente von A („die* ***Kardinalität*** *von A"). Ist A nicht endlich, so nennt man A* ***unendlich*** *und schreibt $\#A = \infty$.*

Beispiel 1.1.14 *$\#\varnothing = 0$; $\#\mathbb{N} = \infty$.*

Definition 1.1.15 *Seien A und B Mengen. A heißt* ***Teilmenge*** *von B wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Man sagt auch: „A ist eine* ***Untermenge*** *von B"; oder: „B ist eine* ***Obermenge*** *von A". Notation: $A \subset B$.*

Beispiel 1.1.16 *$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.*

Beispiel 1.1.17 *Für jede Menge M gilt: $\varnothing \subset M$.*

Definition 1.1.18 *Ist A eine Menge, so bezeichnet*

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \text{ Menge}, B \subset A\}$$

die Menge aller Teilmengen von A; $\mathcal{P}(A)$ wird ***Potenzmenge*** *von A genannt.*

Beispiel 1.1.19 $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

Definition 1.1.20 *Seien A und B Mengen.*

(a) *Der **Schnitt** von A und B ist $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ („A **geschnitten** B“).*

(b) *Die **Vereinigung** von A und B ist $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ („A **vereinigt** B“).*

(c) *Die **Differenz** von A und B ist $A \backslash B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ („A **ohne** B“).*

Satz 1.1.21 *Für beliebige Mengen A, B und C gelten die folgenden **Distributivgesetze**:*

(a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

(b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Definition 1.1.22 *Ist I eine Menge, und ist A_i eine Menge für jedes $i \in I$, so schreibt man:*
Die Vereinigung aller A_i:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I \colon x \in A_i\}$$

Der Schnitt aller A_i:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I \colon x \in A_i\}$$

Ist $I = \{m, m+1, \ldots, n\}$ für zwei ganze Zahlen m, n, so schreibt man auch

$$\bigcup_{i=m}^{n} A_i \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i=m}^{n} A_i.$$

Definition 1.1.23 *Sind $x_1, \ldots, x_n$ mathematische Objekte, so führt man ein neues Objekt ein: das n-**Tupel** $(x_1, \ldots, x_n)$. Zwei n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ sind genau dann gleich, wenn gilt:*

$$x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n.$$

*Ein **Paar** ist ein 2-Tupel, ein **Tripel** ist ein 3-Tupel, etc.*

*Das **kartesische Produkt** von Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist die Menge*

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}.$$

Ist $A_i = A$ für alle i, so schreibt man auch A^n statt $A_1 \times \cdots \times A_n$.

1.2 Abbildungen

Definition 1.2.1 *Seien A und B Mengen. Eine **Abbildung** f (oder **Funktion**) von A nach B ist gegeben durch eine Menge $G \subset A \times B$, für die gilt: Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in G$.*

*Falls $(a, b) \in G$, setzt man $f(a) := b$, und man sagt, f **bildet** a auf b **ab**.*

"$\mathrm{Abb}(A,B)$" bezeichnet die Menge aller Abbildungen von A nach B. Statt „$f \in \mathrm{Abb}(A,B)$" schreibt man auch „$f\colon A \to B$", und statt $f(a) = b$ schreibt man auch „$f\colon a \mapsto b$".

*Man nennt A den **Definitionsbereich** von f, B den **Wertebereich** und G den **Graph**.*

Beispiel 1.2.2 *Die **Identität** auf einer Menge A ist $\mathrm{id}_A\colon A \to A, a \mapsto a$.*

Definition 1.2.3 *Seien A, B, C Mengen und seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann ist die **Verknüpfung** von f und g die Abbildung*

$$g \circ f\colon A \to C, a \mapsto g(f(a)).$$

*„$g \circ f$" spricht man oft „g **nach** f" aus.*

Definition 1.2.4 *Seien A und B Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*
(a) *Ist $A' \subset A$, so ist $f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\}$ das **Bild von** A' **unter** f.*
(b) *Das **Bild** von f ist $\mathrm{im}\, f := f(A)$.*
(c) *Ist $B' \subset B$, so ist $f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ das **Urbild von** B' **unter** f.*

Definition 1.2.5 *Seien A und B Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*
(a) *f heißt **injektiv** („f ist eine **Injektion**"), wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(\{b\})) \leqslant 1$*
(b) *f heißt **surjektiv** („f ist eine **Surjektion**"), wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(\{b\})) \geqslant 1$.*
(c) *f heißt **bijektiv** („f ist eine **Bijektion**"), wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(\{b\})) = 1$.*

Satz und Definition 1.2.6 *Ist $f\colon A \to B$ eine bijektive Abbildung, so gibt es genau eine Funktion $g\colon B \to A$, so dass gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$; g heißt „**Inverses** von f" (oder „**Umkehrabbildung** von f") und wird f^{-1} notiert.*

Definition 1.2.7 *Ist I eine Menge und ist A_i eine Menge für jedes $i \in I$, so ist das **kartesische Produkt** wie folgt definiert:*

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I\colon f(i) \in A_i\}.$$

Ist $x_i \in A_i$ für alle $i \in I$, so schreibt man $(x_i)_{i \in I}$ für die Funktion in $\prod_{i \in I} A_i$, die i auf x_i abbildet.

1.3 Partitionen und Äquivalenzrelationen

Definition 1.3.1 *Eine **Partition** einer Menge A ist eine Menge P von nichtleeren Teilmengen von A, so dass es für jedes $a \in A$ genau ein $B \in P$ gibt mit $a \in B$.*

Definition 1.3.2 *Eine **Relation** Ⓡ auf einer Menge A ist gegeben durch eine Menge $G \subset A \times A$. Notation: a Ⓡ b bedeutet $(a,b) \in G$.*

Satz und Definition 1.3.3 *Sei P eine Partition einer Menge A und sei $\sim_P$ die folgende Relation:*

$$a \sim_P a' \iff \exists B \in P\colon (a \in B \wedge a' \in B).$$

Diese Relation hat folgende Eigenschaften:
(a) $\forall a \in A\colon a \sim a$ *(**Reflexivität**)*
(b) $\forall a, b \in A\colon (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$ *(**Symmetrie**)*
(c) $\forall a, b, c \in A\colon (a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c)$ *(**Transitivität**)*
*Eine Relation mit den Eigenschaften (a)–(c) nennt man **Äquivalenzrelation**.*

Satz und Definition 1.3.4 *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A, so gibt es genau eine Partition P von A so dass $a \sim a' \iff a \sim_P a'$.*

*Diese Partition P nennt man „**Quotient** von A durch $\sim$" oder „A **modulo** $\sim$". Notation dafür (für P): $A/\sim$.*

*Ist $a \in B \in A/\sim$, so nennt man B die **Äquivalenzklasse** von a.*

2 Algebraische Grundbegriffe

2.1 Gruppen

Satz und Definition 2.1.1 (a) *Eine **Halbgruppe** ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $\circ\colon G \times G \to G$ („**Verknüpfung**"), die folgende Eigenschaft hat: Für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (**Assoziativität**).*
(b) *Ein **neutrales Element** einer Halbgruppe G ist ein Element $e \in G$ für das gilt: $\forall a \in G\colon a \circ e = e \circ a = a$.*
(c) *Wenn ein neutrales Element existiert, ist es eindeutig.*
(d) *Ist G eine Halbgruppe mit neutralem Element e und ist $a \in G$ beliebig, so heißt ein Element $b \in G$ **Inverses** von a, wenn gilt: $a \circ b = b \circ a = e$.*
(e) *Wenn a ein Inverses hat, so ist es eindeutig.*
(f) *Eine Halbgruppe mit neutralem Element, bei der jedes Element ein Inverses hat, heißt **Gruppe**.*
(g) *Eine Halbgruppe oder Gruppe G heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn gilt: $\forall a, b \in G\colon a \circ b = b \circ a$.*
(Man sagt auch: „$(G, \circ)$ ist eine (Halb)gruppe.")

Notation 2.1.2 *Typische Notationen für Gruppen:*
Verknüpfung: $a \circ b$, neutrales Element: e; Inverses: a^{-1}
*Verknüpfung: $a \cdot b$ (oder ab), neutrales Element: 1; Inverses: a^{-1} (**multiplikative Notation**)*
*Verknüpfung: $a + b$, neutrales Element: 0; Inverses: $-a$ (**additive Notation**).*

Beispiel 2.1.3 *$\mathbb{Q}^\times$ bezeichnet die Gruppe $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ mit Multiplikation als Verknüpfung.*

$\mathbb{R}^\times$ bezeichnet die Gruppe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit Multiplikation als Verknüpfung.

Beispiel 2.1.4 *Für $n \in \mathbb{N}$ ist die **symmetrische Gruppe***

$$S_n := \{f \in \mathrm{Abb}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\}) \mid f \text{ ist Bijektion}\},$$

*mit der Verknüpfung von Abbildungen als Verknüpfung. Die Elemente von S_n werden auch **Permutationen** (der Menge $\{1, \dots, n\}$) genannt.*

Beispiel 2.1.5 *Sind* $(G, \circ)$ *und* $(H, \circ)$ *Gruppen, so ist auch* $G \times H$ *eine Gruppe, mit der Verknüpfung*

$$(g, h) \circ (g', h') = (g \circ g', h \circ h').$$

Definition 2.1.6 *Sei* $(G, \circ)$ *eine Gruppe. Eine* ***Untergruppe*** *von* G *ist eine Teilmenge* $H \subset G$*, so dass* $(H, \circ)$ *eine Gruppe ist.*

Satz und Definition 2.1.7 *Sei* $(G, +)$ *eine abelsche Gruppe und* H *eine Untergruppe.*

(a) *Dann ist* $\{a + H \mid a \in G\}$ *eine Partition von* G*. Notation für diese Partition:* G/H*. (Ausgesprochen: „*G ***modulo*** H*"; man nennt* G/H *auch* ***Quotientengruppe****.)*

(b) *Sind* $B, B' \in G/H$ *so ist auch* $B + B' \in G/H$*; mit dieser Verknüpfung ist* G/H *eine Gruppe.*

Definition 2.1.8 *Seien* $(G, \circ)$ *und* $(H, \triangle)$ *Gruppen. Eine Abbildung* $f \colon G \to H$ *heißt* ***Gruppenhomomorphismus****, wenn gilt:*

$$\forall a, b \in G \colon f(a \circ b) = f(a) \triangle f(b).$$

$\mathrm{Hom}(G, H)$ *bezeichnet die Menge aller Gruppenhomomorphimen von* G *nach* H*.*

Ein ***Gruppenisomorphismus*** *ist ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.*

Beispiel 2.1.9 *Sei* G *eine Gruppe und* H *eine Untergruppe.*

(a) $H \to G, h \mapsto h$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*

(b) *Ist* G *abelsch, so ist* $G \to G/H, a \mapsto a + H$ *ein Gruppenhomomorphismus.*

Diese Abbildungen nennt man ***kanonische Abbildungen****.*

Satz 2.1.10 *Sind* $f \colon G \to H$ *und* $g \colon H \to K$ *Gruppenhomomorphismen, so ist auch* $g \circ f$ *ein Gruppenhomomorphismus.*

Definition 2.1.11 *Der* ***Kern*** *eines Gruppenhomomorphismus* $f \colon G \to H$ *ist* $\ker f := \{a \in G \mid f(a) = e\}$*.*

Satz 2.1.12 *Ist* $f \colon G \to H$ *ein Gruppenhomomorphismus, so ist* $\ker f$ *eine Untergruppe von* G *und* $\mathrm{im}\, f$ *eine Untergruppe von* H*.*

Satz 2.1.13 (Homomorphiesatz für abelsche Gruppen) *Sind* G *und* H *abelsche Gruppen und ist* $f \colon G \to H$ *ein Gruppenhomomorphismus, so gibt es genau einen Isomorphismus* $g \colon G/\ker f \to \mathrm{im}\, f$*, so dass die Verknüpfung der Abbildungen*

$$G \overset{\mathrm{kan}}{\to} G/\ker f \overset{g}{\to} \mathrm{im}\, f \overset{\mathrm{kan}}{\to} H$$

gleich f *ist. (Hierbei sind* kan *jeweils die kanonischen Abbildungen.)*

Definition 2.1.14 *Sei* $f \in S_n$ *(siehe 2.1.4). Die* ***Fehlstände*** *von* f *sind*

$$F_f := \{\{a, b\} \subset \{1, \ldots, n\} \mid a < b \wedge f(a) > f(b)\}.$$

Das ***Signum*** *von* f *ist* $\mathrm{sgn}(f) := (-1)^{\# F_f}$*.*

Satz 2.1.15 sgn: $S_n \to \{1, -1\}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Notation 0.24 *Sei* $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ *eine endliche Menge. Sind die* a_i *Elemente einer Halbgruppe* $(G, +)$ *für jedes* $i \in I$*, so schreibt man:*

$$\sum_{i \in I} a_i := a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}$$

Sind die a_i *Elemente einer Halbgruppe* $(G, \cdot)$ *für jedes* $i \in I$*, so schreibt man:*

$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_n}$$

Ist I *leer, so setzt man* $\sum_{i \in I} a_i := 0$ *bzw.* $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

Ist $I = \{m, m+1, \ldots, n\}$ *für ganze Zahlen* m *und* n*, so schreibt man auch*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \qquad \text{bzw.} \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i$$

2.2 Ringe und Körper

Definition 2.2.1 *Ein* ***Ring*** *ist eine Menge* R *mit zwei Verknüpfungen* $+: R \times R \to R$ *und* $\cdot: R \times R \to R$*, so dass Folgendes gilt:*

(a) $(R, +)$ *ist eine abelsche Gruppe.*
(b) $(R, \cdot)$ *ist eine Halbgruppe.*
(c) $\forall a, b, c \in R: \big((a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \ \wedge \ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c\big)$ ***(Distributivität)***

Ein Ring heißt ***unitär****, wenn* $(R, \cdot)$ *ein neutrales Element besitzt. Ein Ring heißt* ***kommutativ****, wenn* $(R, \cdot)$ *abelsch ist. Ein* ***Körper*** *ist ein kommutativer Ring* K*, bei dem* $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ *eine Gruppe ist. Ist* K *ein Körper, so setzt man* $K^\times := K \backslash \{0\}$.

Bemerkung 2.2.2 *Ist* K *ein Körper, so gilt für alle* $x, y \in K$*:*

(a) $0 \cdot x = 0$
(b) $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
(c) *Wenn* $xy = 0$ *ist, dann ist* $x = 0$ *oder* $y = 0$.

Beispiel 2.2.3 *Ist* $m \in \mathbb{N}, m \geqslant 1$*, so ist* $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *ein Ring mit der Addition und Multiplikation, die von* $\mathbb{Z}$ *induziert wird, d. h. wenn* $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, a \mapsto \bar{a}$ *die kanonische Abbildung ist, setzt man* $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b}$ *und* $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$.

Satz 2.2.4 *Ist* p *eine Primzahl, so ist* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *ein Körper. Dieser Körper wird mit* $\mathbb{F}_p$ *bezeichnet.*

2.3 Die komplexen Zahlen

Satz und Definition 2.3.1 *Die* ***komplexen Zahlen*** $\mathbb{C}$ *sind wie folgt definiert:* $(\mathbb{C}, +) = (\mathbb{R}^2, +)$*; für* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ *definiere* $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$*. Mit diesen Verknüpfungen ist* $\mathbb{C}$ *ein Körper.*

Notation 2.3.2 *Wir fassen* $\mathbb{R}$ *als Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *auf, indem wir* $a \in \mathbb{R}$ *mit* $(a, 0) \in \mathbb{C}$ *identifizieren. (Diese Identifikation ist mit Addition und Multiplikation kompatibel.) Das Element* $(0, 1)$ *in* $\mathbb{C}$ *wird mit* i *bezeichnet. So lässt sich jedes Element* $(a, b) \in \mathbb{C}$ *schreiben als* $a + bi$ *(für* $a, b \in \mathbb{R}$*).*

Definition 2.3.3 *Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$.*
(a) *Der* ***Realteil*** *von z ist a, der* ***Imaginärteil*** *ist b.*
(b) *Das* ***(komplex) Konjugierte*** *von z ist $\bar{z} := a - ib$. Der* ***Betrag*** *von z ist $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$.*

Satz 2.3.4 *Für $z, z' \in \mathbb{C}$ gilt:*
(a) $\bar{\bar{z}} = z$
(b) $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$.
(c) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
(d) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$
(e) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

2.4 Polynomringe

Im Folgenden sei R ein unitärer, kommutativer Ring.

Satz und Definition 2.4.1 *Ein Polynom über R ist ein Tupel $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} R$, für das gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i > n$ gilt: $a_i = 0$.*

Sind $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Polynome, so definiert man

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

und

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \cdot (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (c_i)_{i\in\mathbb{N}}, \quad \text{wobei } c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$$

Die Menge aller Polynome über R ist mit dieser Addition und Multiplikation ein Ring (unitär, kommutativ), der ***Polynomring*** *über R.*

Notation 2.4.2 *Der Polynomring über R wird mit $R[x]$ bezeichnet, wobei x ein (neu eingeführtes) Symbol für das Polynom $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ ist.*

Der Ring R wird als Teilmenge von $R[x]$ aufgefasst, indem $a \in R$ mit dem Polynom $(a, 0, 0, 0, \dots)$ identifiziert wird. (Dies ist mit Addition und Multiplikation kompatibel.)

Insbesondere lässt sich ein Polynom $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ schreiben als $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Definition 2.4.3 *Sei $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in R[x]$ ein Polynom über R (wobei $a_0, \dots, a_n \in R$).*
(a) *Ist $a_n \neq 0$, so ist n der* ***Grad*** *von f (Notation: $\deg f$) und a_n der* ***Leitkoeffizient*** *von f. Ist $a_n = 1$, so nennt man f* ***normiert****. Man definiert $\deg 0 = -1$. Ist $\deg f \leqslant 0$, so nennt man f* ***konstant****. Ist $\deg f \leqslant 1$, so nennt man f* ***linear****.*
(b) *Das Polynom f definiert eine Funktion von R nach R, die auch mit f bezeichnet wird: $f(b) := a_0 + a_1 b + \dots + a_n b^n$ für $b \in R$*
(c) *Eine* ***Nullstelle*** *von f ist ein Element $b \in R$ mit $f(b) = 0$.*

Im Folgenden sei K ein Körper.

Bemerkung 2.4.4 *Sind $f, g \in K[x]$, beide ungleich 0, so ist $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$.*

Satz 2.4.5 (Polynomdivision) *Sind* $f, g \in K[x]$ *Polynome mit* $\deg g \geqslant 2$*, so gibt es Polynome* $h, r \in K[x]$ *mit*

$$f = g \cdot h + r$$

und $\deg r < \deg g$.

Bemerkung 2.4.6 *Ist* R *ein kommutativer, unitärer Ring, sind* $f, g \in R[x]$ *und ist* $a \in R$*, so gilt:* $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ *und* $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.

Satz 2.4.7 *Ist* $f \in K[x]$, $f \neq 0$ *und ist* b *eine Nullstelle von* f*, so gibt es ein* $g \in K[x]$ *mit* $f = (x - b) \cdot g$.

Korollar 2.4.8 *Ist* $f \in K[x]$, $f \neq 0$*, so hat* f *maximal* $\deg f$ *verschiedene Nullstellen.*

Satz 2.4.9 (Fundamentalsatz der Algebra) *Ist* $f \in \mathbb{C}[x]$ *und* $\deg f \geqslant 1$*, so besitzt* f *eine Nullstelle.*

Korollar 2.4.10 *Ist* $f \in \mathbb{C}[x]$, $f \neq 0$*, so gibt es* $a, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ *so dass* $f = a \cdot \prod_{i=1}^{n}(x - b_i)$*; hierbei ist* $n = \deg f$.

3 Vektorräume

3.1 Definition

Im Folgenden sei K ein Körper.

Definition 3.1.1 *Ein* ***Vektorraum*** *über* K *(auch: ein* K***-Vektorraum****) ist eine abelsche Gruppe* $(V, +)$*, zusammen mit einer Verknüpfung* $\cdot\colon K \times V \to V$*, so dass für alle* $r, s \in K$ *und alle* $u, v \in V$ *gilt:*
(a) $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$
(b) $(r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$
(c) $(r \cdot s) \cdot v = r \cdot (s \cdot v)$
(d) $1 \cdot v = v$
Die Elemente von V *nennt man* ***Vektoren****, die Elemente von* K ***Skalare****;* $+$ *heißt* ***Vektoraddition****,* $\cdot$ *heißt* ***Skalarmultiplikation****. Das Element* $0 \in V$ *nennt man* ***Nullvektor****.*

Beispiel 3.1.2 K^n *ist ein Vektorraum mit der Skalarmultiplikation*

$$r \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (ra_1, \ldots, ra_n).$$

Elemente von K^n *werden oft* $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *geschrieben (statt* $(a_1, \ldots, a_n)$*).*

Satz 3.1.3 *Ist* V *ein* K*-Vektorraum, so gilt für alle* $r \in K$ *und alle* $v \in V$*:*
(a) $r \cdot v = 0 \iff (r = 0 \vee v = 0)$
(b) $(-1) \cdot v = -v$.

Satz und Definition 3.1.4 *Sind* U *und* V K*-Vektorräume, so ist* $U \times V$ *ein* K*-Vektorraum mit der Skalarmultiplikation* $r \cdot (u, v) = (ru, rv)$ *für* $r \in K$, $u \in U$, $v \in V$*. Man nennt* $U \times V$ *die* ***direkte Summe*** *von* U *und* V *und schreibt auch* $U \oplus V$ *dafür.*

3.2 Untervektorräume

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 3.2.1 *Ein **Untervektorraum** eines K-Vektorraums V ist eine Teilmenge $U \subset V$, die mit der gleichen Vektoraddition und der gleichen Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum bildet.*

Satz 3.2.2 *Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V ist ein Untervektorraum genau dann, wenn U nicht leer ist und U abgeschlossen ist unter Vektoraddition und unter Skalarmultiplikation.*

Definition 3.2.3 *Sei V ein Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_m, w \in V$. Man nennt w eine **Linearkombination** von $v_1, \dots, v_m$, wenn es $a_1, \dots, a_m \in K$ gibt mit $w = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$. Hier ist $m = 0$ auch erlaubt: Der Nullvektor ist Linearkombination vom „leeren Tupel".*

Definition 3.2.4 *Ist V ein K-Vektorraum und $A \subset V$ eine beliebige Teilmenge, so definiert man $\langle A \rangle_K$ als die Menge aller Vektoren $w \in V$, die sich als Linearkombination von (jeweils endlich vielen) Vektoren aus A schreiben lassen. (Ist A leer, so ist $\langle A \rangle_K = \{0\}$.) Man nennt $\langle A \rangle_K$ die **lineare Hülle** (oder den **Span** oder das **Erzeugnis**) von A; Ist $U = \langle A \rangle_K$, so sagt man auch „A **erzeugt** U" oder „A ist ein **Erzeugendensystem** von U".*

Andere Notationen: $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K := \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle_K$ und $\langle (v_i)_{i \in I} \rangle_K := \langle (\{v_i \mid i \in I\} \rangle_K$ für Vektoren $v_i \in V$.

Satz 3.2.5 *Ist $A \subset V$ für einen K-Vektorraum V, so ist $\langle A \rangle_K$ „der kleinste Untervektorraum von V, der A (als Teilmenge) enthält", d. h. $\langle A \rangle_K$ ist ein Untervektorraum von V, und jeder Untervektorraum $U \subset V$, der A enthält, enthält auch $\langle A \rangle_K$.*

Satz 3.2.6 *Ist V ein K-Vektorraum und sind U, U' Untervektorräume von V, so ist $U \cap U'$ auch ein Untervektorraum von V.*

Satz und Definition 3.2.7 *Ist V ein K-Vektorraum und sind U, U' Untervektorräume von V, so setzt man*

$$U + U' := \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}.$$

Es gilt: $U + U' = \langle U \cup U' \rangle_K$; insbesondere ist $U + U'$ ein Untervektorraum von V.

Satz und Definition 3.2.8 *Ist V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ ein Untervektorraum, so ist die abelsche Gruppe V/U auch ein K-Vektorraum mit der Skalarmultiplikation $r \cdot (v + U) = rv + U$. Man spricht das „V **modulo** U" aus und nennt V/U auch einen **Quotienten-(vektor-)raum**.*

3.3 Lineare Unabhängigkeit

Sei weiterhin K ein Körper, und sei außerdem V ein K-Vektorraum.

Definition 3.3.1 *Ein Tupel* $(v_i)_{i\in I}$ *von Vektoren heißt* ***linear unabhängig****, wenn es keine echte Teilmenge* $I' \subsetneq I$ *gibt mit* $\langle (v_i)_{i\in I'}\rangle_K = \langle (v_i)_{i\in I}\rangle_K$*. (Ist* $I = \{1,\dots,n\}$ *so sagt man auch: „Die Vektoren* $v_1,\dots,v_n$ *sind linear unabhängig".)*

Eine Teilmenge $A \subset V$ *heißt* ***linear unabhängig****, wenn es keine echte Teilmenge* $A' \subsetneq A$ *gibt mit* $\langle A'\rangle_K = \langle A\rangle_K$*.*

*„****Linear abhängig****" bedeutet: nicht linear unabhängig.*

Satz 3.3.2 (a) *Vektoren* $v_1,\dots,v_m \in V$ *sind linear abhängig genau dann wenn es* $r_1,\dots,r_m \in K$ *gibt so dass mindestens ein* $r_i \neq 0$ *ist aber* $\sum_{i=1}^m r_i v_i = 0$*. (So eine Summe nennt man eine* ***lineare Abhängigkeit****.)*

Sei jetzt $A \subset V$ *eine Menge von Vektoren.*

(b) *Ist* A *linear unabhängig, so ist auch jede Teilmenge* $A' \subset A$ *linear unabhängig.*

(c) *Ist* A *linear abhängig, so gibt es eine endliche Teilmenge* $A_0 \subset A$*, die linear abhängig ist.*

Insbesondere: A *ist linear abhängig genau dann wenn es eine endliche, nicht leere Teilmenge* $A_0 \subset A$ *gibt und Skalare* $r_v \in K^\times$ *für* $v \in A_0$ *mit* $\sum_{v\in A_0} r_v \cdot v = 0$*. (Auch diese Summe nennt man eine* ***lineare Abhängigkeit****.)*

Satz 3.3.3 *Ist* $A \subset V$ *linear unabhängig und* $v \in V\backslash\langle A\rangle_K$*, so ist auch* $A \cup \{v\}$ *linear unabhängig.*

3.4 Basis und Dimension

Sei weiterhin K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Definition 3.4.1 *Ein Tupel* $(v_i)_{i\in I}$ *von Vektoren* $v_i \in V$ *nennt man* ***Basis*** *von* V*, wenn es linear unabhängig ist und* V *erzeugt. Analog für Mengen: Eine Teilmenge* $A \subset V$ *nennt man* ***Basis*** *von* V*, wenn sie linear unabhängig ist und* V *erzeugt.*

Beispiel 3.4.2 *In* K^n *bilden die Vektoren*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis, die ***Standardbasis****.*

Satz 3.4.3 *Sei* $A \subset V$*. Dann sind äquivalent:*

(a) A *ist eine Basis von* V*.*

(b) A *ist ein minimales Erzeugendensystem von* V*, d. h.:* A *erzeugt* V *aber keine echte Teilmenge* $A' \subsetneq A$ *erzeugt* V*.*

(c) A *ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von* V*, d. h.:* A *ist linear unabhängig, aber jede echte Obermenge* $A' \supsetneq A$ *ist linear abhängig.*

(d) *Jeder Vektor* $v \in V$ *lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombintation von Vektoren aus* A *schreiben, d. h. es gibt genau eine endliche Teilmenge* $A_0 \subset A$ *und eindeutig bestimmte* $r_w \in K^\times$ *für* $w \in A_0$ *so dass*

$$v = \sum_{w\in A_0} r_w \cdot w$$

ist. (A_0 darf leer sein, nämlich wenn $v = 0$.)

Satz 3.4.4 (Basisergänzungssatz) *Ist A eine linear unabhängige Teilmenge von V, so gibt es eine Basis A' von V, mit $A' \supset A$. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis.*

Definition 3.4.5 *Eine Menge $\mathcal{K}$ von Mengen heißt* ***Kette****, wenn für beliebige $A, A' \in \mathcal{K}$ gilt: $A \subset A'$ oder $A' \subset A$.*

Satz 3.4.6 (Variante des Zornschen Lemmas) *Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Menge von Teilmengen mit folgenden Eigenschaften:*
(a) *$\mathcal{T}$ ist nicht leer.*
(b) *Für jede nicht-leere Kette $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ gilt $\bigcup_{A \in \mathcal{K}} A \in \mathcal{T}$.*
Dann gibt es eine Menge $A_0 \in \mathcal{T}$, so dass keine echte Obermenge $A \supsetneq A_0$ in $\mathcal{T}$ liegt.

Satz 3.4.7 *Alle Basen von V haben die gleiche Kardinalität.*

Satz 3.4.8 (Steinitzscher Austauschsatz) *Ist A eine Basis von V und sind $w_1, \ldots, w_n \in V$ linear unabhängig, so gibt es eine Teilmenge $B \subset A$ mit $\#(A \backslash B) = n$ so dass $B \cup \{w_1, \ldots, w_n\}$ auch eine Basis von V ist.*

Definition 3.4.9 *Die* ***Dimension*** *„$\dim V$“ von V ist die Kardinalität einer (beliebigen) Basis von V. Ist $\dim V = n$, so sagt man auch „V ist n-dimensional“. V heißt* ***endlich dimensional*** *falls $\dim V \in \mathbb{N}$ und* ***unendlich dimensional*** *falls $\dim V = \infty$.*

Satz 3.4.10 *Sei V endlich dimensional und sei $A \subset V$ mit $\#A = \dim V$. Dann sind äquivalent:*
(a) *A ist linear unabhängig.*
(b) *A erzeugt V.*
(c) *A ist eine Basis von V.*

Satz 3.4.11 *Sind $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume, so gilt: $\dim(U + U') + \dim(U \cap U') = \dim U + \dim U'$ (wobei wir setzen: $\infty + a := \infty$ für beliebige $a \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).*

Satz 3.4.12 *Ist $U \subset V$ ein Untervektorraum, so gilt $\dim V = \dim U + \dim V/U$. Insbesondere ist $\dim U \leqslant \dim V$.*

4 Lineare Abbildungen und Matritzen

4.1 Lineare Abbildungen

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 4.1.1 *Seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt* ***lineare Abbildung*** *oder* ***(Vektorraum-)Homomorphismus*** *wenn für alle $v, v' \in V$ und alle $r \in K$ gilt:*
(a) *$f(v + v') = f(v) + f(v')$ (d. h. f ist ein Gruppenhomomorphismus)*
(b) *$f(rv) = rf(v)$.*

Ist f außerdem bijektiv, so nennt man f einen ***(Vektorraum-)Isomorphismus****. Die Menge aller Vektorraum-Homomorphismen von V nach W wird mit* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *bezeichnet.*

Beispiel 4.1.2 *Ist V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum, so sind die kanonischen Abbildungen $U \to V$ und $V \to V/U$ (siehe Beispiel 2.1.9) lineare Abbildungen.*

Beispiel 4.1.3 *Ist V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so ist*

$$K^n \to V, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Satz 4.1.4 *Sind V und W K-Vektorräume, ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und sind $(w_i)_{i \in I}$ beliebige Vektoren in W, so gibt es genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$, die v_i auf w_i abbildet für jedes $i \in I$.*

Satz 4.1.5 *Seien U, V und W K-Vektorräume und $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen. Dann gilt:*

(a) *$g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$.*
(b) *Ist f ein Isomorphismus, so ist auch f^{-1} ein Vektorraum-Isomorphismus (also insbesondere linear).*
(c) *Der Kern $\ker f$ ist ein Untervektorraum von U (vgl. Definition 2.1.11).*
(d) *Das Bild $\mathrm{im}\, f$ ist ein Untervektorraum von V (vgl. Definition 1.2.4).*
(e) *Für $u, u' \in U$ gilt: $f(u) = f(u') \iff u - u' \in \ker f$.*
(f) *Für $A \subset U$ gilt: $f(\langle A \rangle_K) = \langle f(A) \rangle_K$.*

Bemerkung 4.1.6 *Ein Isomorphismus $f\colon V \to W$ erhält alle „strukturellen Eigenschaften". Z. B. gilt für $A \subset V$: A ist linear unabhängig / ein Erzeugendensystem von V / eine Basis von V genau dann wenn $f(A)$ linear unabhängig / ein Erzeugendensystem von W / eine Basis von W ist.*

Satz 4.1.7 (Homomorphiesatz für Vektorräume) *Sind V und W K-Vektorräume und ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so gibt es genau einen Vektorraum-Isomorphismus $g\colon V/\ker f \to \mathrm{im}\, f$, so dass die Verknüpfung der Abbildungen*

$$V \overset{\mathrm{kan}}{\to} V/\ker f \overset{g}{\to} \mathrm{im}\, f \overset{\mathrm{kan}}{\to} W$$

gleich f ist. (Hierbei sind kan *jeweils die kanonischen Abbildungen.)*

Definition 4.1.8 *Der* ***Rang*** *einer linearen Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist* $\mathrm{rk}\, f := \dim(V/\ker(f)) = \dim(\mathrm{im}(f))$.

Bemerkung: Aus Bemerkung 4.1.6 folgt auch: „Verknüpfen mit Isomorphismen ändert den Rang nicht", d. h. für lineare Abbildungen $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und Isomorphismen $g \in \mathrm{Hom}(V', V)$ und $h \in \mathrm{Hom}(W, W')$ gilt: $\mathrm{rk}\, f = \mathrm{rk}(h \circ f \circ g)$.

Satz 4.1.9 *Sind U, V und W K-Vektorräume und $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen, so gilt:*

(a) $\operatorname{rk} f \leqslant \min\{\dim U, \dim V\}$
(b) $\dim U = \operatorname{rk} f + \dim \ker f$
(c) $\operatorname{rk}(g \circ f) \leqslant \min\{\operatorname{rk} g, \operatorname{rk} f\}$
(d) $\operatorname{rk}(f) + \operatorname{rk}(g) \leqslant \operatorname{rk}(g \circ f) + \dim V$ ***(Sylvesters Rang-Ungleichung)***

Korollar 4.1.10 *Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann gilt:*
(a) *Ist $\dim V = \dim W$, so ist f surjektiv genau dann wenn f injektiv ist.*
(b) *Ist $\dim V > \dim W$, dann ist f nicht injektiv.*
(c) *Ist $\dim V < \dim W$, dann ist f nicht surjektiv.*

Satz 4.1.11 *Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ mit $\dim V = m, \dim W = n$ und $\operatorname{rk} f = k$. Dann gibt es Basen $v_1, \ldots, v_m$ von V und $w_1, \ldots, w_n$ von W so dass gilt: $f(v_i) = w_i$ falls $i \leqslant k$; $f(v_i) = 0$ falls $i > k$.*

Bemerkung 4.1.12 *Sind V und W K-Vektorräume, so ist auch $\operatorname{Hom}(V, W)$ ein K-Vektorraum mit **punktweiser Vektor-Addition** und **punktweiser Skalarmultiplikation**: Für $f, g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $r \in K$ setze $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und $(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$.*

4.2 Matrizen

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 4.2.1 *Seien $m, n \geqslant 1$ natürliche Zahlen. Eine $m \times n$-**Matrix** über K ist ein $m \cdot n$-Tupel A von Elementen aus K, dessen Einträge mit Paaren (i, j) für $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$ indiziert sind. Notation:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}.$$

(Hierbei ist der Index „ij“ eine Kurzschreibweise für „i, j“ und bedeutet nicht *$i \cdot j$.) Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet und auf übliche Weise als K-Vektorraum aufgefasst (d. h. mit komponentenweiser Vektoraddition und Skalarmultiplikation). Die Matrix, deren Einträge alle 0 sind, heißt **Nullmatrix** (und wird wie üblich selbst mit 0 bezeichnet).*

Satz und Definition 4.2.2 *Wir identifizieren eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit der Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(K^n, K^m)$, die gegeben ist durch*

$$f(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} b_i \end{pmatrix}.$$

Notation, für $v \in K^n$: $Av := f(v)$. Diese Identifikation ist eine Bijektion zwischen den Mengen $K^{m \times n}$ und $\operatorname{Hom}(K^n, K^m)$.

Definition 4.2.3 *Seien $A \in K^{\ell \times m}$ und $B \in K^{m \times n}$.*

(a) *Das Produkt $A \cdot B$ ist die Matrix, die zur Verknüpfung $A \circ B \colon K^n \to K^\ell$ gehört (**Matrix-Multiplikation**).*
(b) *Der **Rang** $\operatorname{rk} A$ ist der Rang der zu A gehörigen Abbildung $K^n \to K^m$.*

Satz 4.2.4 *Das Produkt von Matrizen $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant \ell, 1 \leqslant j \leqslant m} \in K^{\ell \times m}$ und $B = (b_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n} \in K^{m \times n}$ ist die Matrix $C = (c_{ik})_{1 \leqslant i \leqslant \ell, 1 \leqslant k \leqslant n} \in K^{\ell \times n}$, die gegeben ist durch:*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

Definition 4.2.5 *Die **Einheitsmatrix** $I_n \in K^{n \times n}$ ist die Matrix, die der Identitätsabbildung $K^n \to K^n$ entspricht:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, wenn die zugehörige Abbildung bijektiv ist; die Matrix zur inversen Abbildung wird mit A^{-1} bezeichnet und heißt **inverse Matrix**.*

Satz 4.2.6 *$K^{n \times n}$ ist mit der Matrixmultiplikation ein unitärer Ring; I_n ist das neutrale Element der Multiplikation.*

Satz 4.2.7 *Zu jeder Matrix $A \in K^{m \times n}$ gibt es invertierbare Matrizen $S \in K^{m \times m}$ und $T \in K^{n \times n}$ so dass*

$$SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Anzahl der 1en gleich $\operatorname{rk} A$ ist.

4.3 Lineare Gleichungssysteme

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 4.3.1 *Ist $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in K^{m \times n}$ und $b = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant m} \in K^m$, und ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ein Tupel von Variablen (**Unbekannte**), so nennt man*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

*ein **lineares Gleichungssystem**. Kürzere Schreibweise: $Ax = b$. Eine **Lösung** von „$Ax = b$“ ist ein $c = (c_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, für das $Ac = b$ gilt.*

*Ein **homogenes lineares Gleichungssystem** ist ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$.*

Satz 4.3.2 *Die Menge der Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ für $A \in K^{m\times n}$ ist ein Untervektorraum U von K^n mit $\dim U = n - \operatorname{rk} A$; insbesondere gibt es, wenn $n > m$ ist (d. h. wenn es mehr Unbekannte als Gleichungen gibt), immer nicht-triviale Lösungen, d. h. Lösungen $\neq (0,\ldots,0)$.*

Satz 4.3.3 *Ist c eine beliebige Lösung eines (inhomogenen) Gleichungssystems $Ax = b$ so hat die Menge aller Lösungen die Form $\{c + d \mid Ad = 0\}$.*

Definition 4.3.4 *Ist $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ und $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$, so ist die **erweiterte Matrix** zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ die $m\times(n+1)$-Matrix*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Definition 4.3.5 ***Elementare Umformungen*** *eines linearen Gleichungssystems sind:*
(a) *zwei Gleichungen vertauschen;*
(b) *eine Gleichung mit einem Skalar $r \in K^\times$ multiplizieren;*
(c) *zu einer Gleichung ein Vielfaches einer anderen Gleichung addieren.*

Satz und Definition 4.3.6 *Einer elementare Umformung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ entspricht, die erweiterte Matrix $(A|b)$ durch $E(A|b)$ zu ersetzen, wobei $E = (e_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ eine der folgenden **Elementarmatrizen** ist:*
(a) *Gleichungen k und ℓ vertauschen (für $1 \leqslant k,\ell \leqslant m$, $k \neq \ell$): $e_{ii} = 1$ falls $i \neq k,\ell$; $e_{k\ell} = e_{\ell k} = 1$; alle anderen e_{ij} sind 0;*
(b) *Gleichung k mit $r \in K^\times$ multiplizieren ($1 \leqslant k \leqslant m$): $e_{ii} = 1$ falls $i \neq k$ $e_{kk} = r$; alle anderen e_{ij} sind 0;*
(c) *das r-fache von Gleichung k zu Gleichung ℓ addieren (für $r \in K$ und $1 \leqslant k,\ell \leqslant m$, $k \neq \ell$): $e_{ii} = 1$; $e_{\ell k} = r$; alle anderen e_{ij} sind 0.*

Bemerkung: Es gilt allgemeiner, für das Produkt AB von Matrizen $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant \ell, 1\leqslant j\leqslant m} \in K^{\ell\times m}$ und $B = (b_{jk})_{1\leqslant j\leqslant m, 1\leqslant k\leqslant n} \in K^{m\times n}$: Die i-te Zeile von A beschreibt, wie man die i-te Zeile des Produkts aus den Zeilen von B berechnet, nämlich:

$$(i\text{-te Zeile von } AB) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot (j\text{-te Zeile von } B)$$

Satz 4.3.7 *Elementare Umformungen eines linearen Gleichungssystems ändern die Lösungsmenge nicht.*

Satz 4.3.8 (Gauß-Algorithmus) *Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch elementare Umformungen in **Zeilenstufenform** bringen, d. h. in die*

Form

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots\cdots\cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & * & \cdots\cdots\cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * \cdots & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{array}\right);$$

und sogar in ***Normalform:***

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccc|c}
0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & \ddots & 0 & * & \cdots & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & *
\end{array}\right).$$

Hierbei stehen die „$*$“ für beliege Skalare. Die eingekästelten 1*en (d. h. die ersten nicht-0-Einträge der Zeilen) nennt man* ***Pivot-Elemente****.*

Satz 4.3.9 *Sei $(A|b)$ ein linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform mit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ und $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$. Die Lösungsmenge ist leer, wenn es eine Zeile der Form $(0\cdots 0|b_i)$ gibt mit $b_i \neq 0$. Ansonsten ist die Lösungsmenge die Menge der $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ mit folgenden Bedingungen an x_j für $1 \leqslant j \leqslant n$:*

(a) *Enhält die j-te Spalte kein Pivot-Element, so ist x_j beliebig.*
(b) *Enhält die j-te Spalte ein Pivot-Element $a_{ij} = 1$, so wird x_j durch die i-te Zeile festgelegt: $x_j = b_i - \sum_{k=j+1}^{n} a_{ik}x_k$.*

Bemerkung: Ist $(A|b)$ sogar in Normalform, so kommen in den Summen in (b) nur diejenigen x_j vor, die beliebig gewählt werden können.

Satz 4.3.10 *Ist $A \in K^{n\times n}$ und bringt man die erweiterte Matrix $(A|I_n)$ in Normalform $(A'|B')$, so gilt: A ist invertierbar genau dann wenn $A' = I_n$; ist dies der Fall, so ist $B' = A^{-1}$.*

Definition 4.3.11 *Sei $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n} \in K^{m\times n}$. Seien $v_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ die Spaltenvektoren von A und $w_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ die Zeilenvektoren. Der* ***Spaltenrang*** *von A ist $\dim\langle v_1, \ldots, v_n\rangle_K$; der* ***Zeilenrang*** *von A ist $\dim\langle w_1, \ldots, w_n\rangle_K$.*

Satz 4.3.12 *Für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt: Zeilenrang = Spaltenrang = Rang.*

Definition 4.3.13 *Die* ***Transponierte*** *einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n} \in K^{m\times n}$ ist die Matrix $A^T := (a_{ji})_{1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m} \in K^{n\times m}$.*

Satz 4.3.14 *Für beliebige Matrizen A, B gilt:*
(a) $(A^T)^T = A$
(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *(falls A, B beides $m \times n$-Matrizen sind)*
(c) $(AB)^T = B^T A^T$ *(falls A eine $\ell \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix ist)*

Bemerkung: Es gilt auch: A ist invertierbar genau dann wenn A^T invertierbar ist, und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bemerkung 4.3.15 *Ist $A \in K^{m\times n}$ beliebig und ist $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix, so ergibt sich AE aus A auf eine der folgenden Arten (wobei die Fälle denen von 4.3.6 entsprechen):*
(a) *zwei Spalten vertauschen*
(b) *eine Spalte mit einem Skalar $\neq 0$ multiplizieren*
(c) *das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte addieren.*

4.4 Arbeiten mit Basen

Sei weiterhin K ein Körper.

Notation 4.4.1 (a) *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$. Wir schreiben $\psi_{\mathcal{B}}\colon K^m \to V$ für den Isomorphismus aus Beispiel 4.1.3, d. h. $\psi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$ für $1 \leqslant i \leqslant m$, und für $v \in V$ setzen wir ${}_{\mathcal{B}}[v] := \psi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) \in K^m$ (d. h. $v = a_1v_1 + \dots a_mv_m$ genau dann wenn ${}_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$).*

(b) *Sei nun W ein weitere K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$, und sei $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$. Wir setzen ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}} := \psi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \psi_{\mathcal{C}} \in K^{m\times n}$; d. h. ist $f(w_j) = a_1v_1 + \dots a_mv_m$, so ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ die j-te Spalte von ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}}$.*

Satz 4.4.2 *Seien U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$.*
(a) *Für $f \in \mathrm{Hom}(W, V)$ und $w \in W$ gilt: ${}_{\mathcal{B}}[f(w)] = {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}} \cdot {}_{\mathcal{C}}[w]$*
(b) *Für lineare Abbildungen $W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} U$ gilt ${}_{\mathcal{A}}[g \circ f]_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{A}}[g]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{C}}$*
(c) *Ist $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_m)$ eine weitere Basis von V so gilt für $v \in V$: ${}_{\mathcal{B}}[v] = {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'} \cdot {}_{\mathcal{B}'}[v]$, und ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}$ ist die Matrix mit den Spalten ${}_{\mathcal{B}}[v'_1]$, …, ${}_{\mathcal{B}}[v'_m]$.*

5 Endomorphismen

Im ganzen Kapitel sei weiterhin K ein Körper.

Definition 5.0.1 *Sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung von V in sich selbst nennt man auch einen **Endomorphismus** von V. Man setzt $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$.*

5.1 Determinanten

Zur Erinnerung: S_n ist die symmetrische Gruppe (Beispiel 2.1.4) und $\operatorname{sgn}(\sigma)$ das Signum von $\sigma \in S_n$ (Definition 2.1.14).

Definition 5.1.1 *Die **Determinante** einer Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in K^{n \times n}$ ist definiert durch die **Leibniz-Formel**:*

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Beispiel 5.1.2 *Es gilt:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

und

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Satz 5.1.3 *Für $A \in K^{n \times n}$ gilt: $\det(A^T) = \det A$.*

Notation 5.1.4 *Sind $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$, so schreiben wir*

$$(v_1 \mid \cdots \mid v_n) := (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in K^{m \times n}$$

für die Matrix, die $v_1, \dots, v_n$ als Spalten hat.

Satz 5.1.5 *Die Determinante ist die einzige Abbildung $K^{n \times n} \to K$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $\det$ *ist **multilinear**, d. h. für alle $j = 1, \dots, n$ und alle (fest gewählten) $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n \in K^n$ ist die Abbildung*

$$K^n \to K, w \mapsto \det(v_1 \mid \cdots \mid v_{j-1} \mid w \mid v_{j+1} \mid \cdots \mid v_n)$$

linear.

(b) $\det$ *ist **alternierend**, d. h. falls $v_1, \dots, v_n \in K^n$ und es $j \neq k$ gibt mit $v_j = v_k$, dann ist $\det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) = 0$.*

(c) $\det$ *ist **normiert**, d. h. $\det(I_n) = 1$.*

Außerdem gilt:

(d) *Für $v_1, \dots, v_n \in K^n$ und $1 \leqslant j < k \leqslant n$ gilt:*

$$\det(v_1 \mid \cdots \mid v_{j-1} \mid v_k \mid v_{j+1} \mid \cdots \mid v_{k-1} \mid v_j \mid v_{k+1} \mid \cdots \mid v_n) = -\det(v_1 \mid \cdots \mid v_n).$$

(e) $\det A = 0$ *genau dann wenn A nicht invertierbar ist (d. h. $\det(v_1 \mid \cdots \mid v_n) = 0$ genau dann wenn $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind).*

Lemma 5.1.6 *Ist $A \in K^{n\times n}$ beliebig und $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix, so gilt* $\det(AE) = \det A \cdot \det E$*: Zwei Spalten tauschen multipliziert die Determinante mit -1, das Vielfache einer Spalte zu einer anderen addieren ändert die Determinante nicht, und eine Spalte mit einem Faktor $r \in K^\times$ multiplizieren ändert auch die Determinante um den Faktor r. Entsprechendes gilt für Zeilentransformationen.*

Satz 5.1.7 *Für Matrizen der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gilt: $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Satz 5.1.8 *Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt:*
(a) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
(b) *Falls A invertierbar ist, gilt* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Definition 5.1.9 *Ist V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und $\mathcal{B}$ eine Basis von V, so setzen wir* $\det f := \det {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$

Satz 5.1.10 *In Definition 5.1.9 hängt* $\det f$ *nicht von der Wahl von $\mathcal{B}$ ab.*

Satz 5.1.11 (Laplacescher Entwicklungssatz) *Sei $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in K^{n\times n}$. Im Folgenden seien $1 \leqslant k, l \leqslant n$. Wir schreiben $A_{(k,l)}$ für die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man aus A erhält, indem man die k-te Zeile und die l-te Spalte rausstreicht.*
(a) *Für jedes ℓ gilt:* $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \cdot a_{k\ell} \cdot \det A_{(k,\ell)}$.
(b) *Für jedes k gilt:* $\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \cdot a_{k\ell} \cdot \det A_{(k,\ell)}$.

5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.2.1 (a) *Zwei Matrizen $A, A' \in K^{n\times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in K^{n\times n}$ gibt mit $A' = S^{-1}AS$.*
(b) *Eine Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

*für $a_{11}, \ldots, a_{nn} \in K$ heißt **Diagonalmatrix**.*
(c) *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.*
*Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so dass ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}}$ eine Diagonalmatrix ist.*

Definition 5.2.2 *Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von f wenn es einen Vektor $v \in V\backslash\{0\}$ gibt mit $f(v) = \lambda v$. In diesem Fall nennt man v **Eigenvektor** von f (zum Eigenwert λ).*

*Der **Eigenraum** zum Eigenwert λ ist $\{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$.*

Bemerkung 5.2.3 *Eigenräume sind Unterverktorräume von V.*

Bemerkung 5.2.4 *Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.*

Satz 5.2.5 *Sei V ein Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Sind $v_1, \dots, v_k \in V$ Eigenvektoren von f zu verschiedenen Eigenwerten, so sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig.*

Definition 5.2.6 *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Das **charakteristische Polynom** von f ist das Polynom $\chi_f := \det(f - x\,\mathrm{id}_V) \in K[x]$. (Formal gesehen wählen wir eine Basis $\mathcal{B}$ von V, betrachten ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{B}} - xI_n$ als Matrix mit Einträgen im Ring $K[x]$ und wenden darauf die Leibniz-Formel an, wobei wir im Ring $K[x]$ arbeiten.)*

Satz 5.2.7 *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Die Eigenwerte von f sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_f .*

Bemerkung 5.2.8 *Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ hat Grad n, und schreibt man es in der Form*

$$\chi_A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

so ist $a_0 = \det A$ und $a_n = (-1)^n$.

Satz 5.2.9 *Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ sind äquivalent:*
(a) *A ist diagonalisierbar.*
(b) *Es gibt eine Basis von $K^{n\times n}$ aus Eigenvektoren von A.*
(c) *Die Summe der Dimensionen der Eigenräume ist n.*

6 Euklidische und unitäre Vektorräume

6.1 Reelle Skalarprodukte

Definition 6.1.1 *Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.*
(a) *Eine **Bilinearform** auf V ist eine Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$, so dass für jedes $v \in V$ die beiden Abbildungen $V \to K$, $u \mapsto \beta(u, v)$ und $V \to K$, $u \mapsto \beta(v, u)$ linear sind.*
(b) *Eine Bilinearform β heißt **symmetrisch**, wenn für alle $u, v \in V$ gilt: $\beta(u, v) = \beta(v, u)$.*

Ab jetzt nehmen wir $K = \mathbb{R}$ an.
(c) *Eine Bilinearform β heißt **positiv definit**, wenn für alle $v \in V\backslash\{0\}$ gilt: $\beta(v, v) > 0$.*
(d) *Ein **(reelles) Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt** auf V ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf V. Für Skalarprodukte verwendet man oft die Notation $\langle u, v\rangle := \beta(u, v)$.*

Definition 6.1.2 (a) *Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.*

(b) *Ist V ein euklidischer Vektorraum, so ist die **Norm** eines Vektors $v \in V$ definiert durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Beispiel 6.1.3 *Das **Standard-Skalarprodukt** auf $\mathbb{R}^n$ ist*

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

Wenn man Vektoren als Matrizen mit einer Spalte auffasst, lässt sich dies auch kürzer schreiben:

$$\langle u, v\rangle = u^T v.$$

Verwendet man dieses Standard-Skalarprodukt, so ist die Norm eines Vektors

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}.$$

Satz 6.1.4 *Sei V ein euklidischer Vektorraum, seien $u, v \in V$ und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\|v\| \geqslant 0$

(b) $\|v\| = 0 \iff v = 0$

(c) $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$

(d) $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$ *(**Cauchy-Schwarz-Ungleichung**), und Gleichheit gilt genau dann, wenn u und v linear abhängig sind.*

(e) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ *(**Minkowski-Ungleichung** oder **Dreiecksungleichung**)*

Satz 6.1.5 *Sei K ein Körper und sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von K^n. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \{\textit{Bilinearformen auf } K^n\} &\to K^{n\times n} \\ \beta &\mapsto (\beta(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion; das Inverse dieser Abbildung ist

$$\begin{aligned} K^{n\times n} &\to \{\textit{Bilinearformen auf } K^n\} \\ A &\mapsto \beta_A, \quad \textit{wobei } \beta_A(u, v) := u^T A v \quad \textit{für } u, v \in K^n. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

(a) *β_A ist symmetrisch genau dann wenn $A = A^T$. (Solche Matritzen A nennt man **symmetrisch**.)*

(b) *Ist $K = \mathbb{R}$, so ist β_A positiv definit genau dann wenn für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $v^T A v > 0$. (Solche Matritzen A nennt man **positiv definit**.)*

Die Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ sind also genau die Abbildungen der Form $\langle u, v\rangle = u^T A v$ für symmetrische, positiv definite Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Bemerkung 6.1.6 *Allgemeiner gilt, in euklidischen Vektorräumen V:*

(a) *Ist $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist $\beta_f(u,v) := \langle u, f(v)\rangle$ eine Bilinearform auf V; dies definiert eine Bijektion zwischen $\mathrm{End}(V)$ und den Bilinearformen auf V.*

(b) *$\beta_f(u,v)$ ist symmetrisch genau dann wenn $\langle u, f(v)\rangle = \langle f(u), v\rangle$. Einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$, der dies erfüllt, nennt man **selbstadjungiert**.*

6.2 Orthonormalbasen

Im Folgenden sei V ein euklidischer Vektorraum.

Definition 6.2.1 (a) *Ein Vektor $v \in V$ heißt **normiert**, wenn $\|v\| = 1$.*

(b) *Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal** (zueinander), wenn $\langle u, v\rangle = 0$ ist. Man scheibt $u \perp v$.*

Definition 6.2.2 *Eine **Orthonormalbasis** von V ist eine Basis $(v_i)_{i\in I}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *v_i ist normiert für alle $i \in I$.*

(b) *$v_i \perp v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$.*

Satz 6.2.3 *Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V.*

(a) *Für beliebige $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i\rangle v_i$; anders ausgedrückt:*

$$_{\mathcal{B}}[v] = \begin{pmatrix} \langle v, v_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, v_n\rangle \end{pmatrix}.$$

(b) *Für beliebige $v, w \in V$ gilt: $\langle v, w\rangle = (_{\mathcal{B}}[v])^T\, _{\mathcal{B}}[w]$.*

Satz 6.2.4 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung) *Jeder endlich dimensionale euklidische Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis. Genauer: Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine beliebige Basis von V, so gibt es eine Orthonormalbasis $w_1, \ldots, w_n$ von V, so dass $\langle w_1, \ldots, w_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \ldots, v_i\rangle_{\mathbb{R}}$ für alle $i \leqslant n$.*

Bemerkung: Sätze 6.2.4 und 6.2.3 zusammen besagen also insbesondere: Für jeden endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V gibt es einen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to V$, so dass das Skalarprodukt auf V dem Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ entspricht.

6.3 Orthogonale transformationen

Definition 6.3.1 *Sei V ein euklidischer Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **orthogonale Transformation** von V, wenn für alle u, v gilt: $\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle$.*

*Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **orthogonal**, wenn sie eine orthogonale Transformation von $\mathbb{R}^n$ ist, wobei wir $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Vektorraum mit dem Standard-Skalarprodukt auffassen.*

Satz 6.3.2 *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind äquivalent:*

(a) *A ist orthogonal.*

(b) *A ist invertierbar und $A^T = A^{-1}$.*

(c) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis.*

Satz 6.3.3 (Hauptachsentransformation) *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch genau dann wenn es eine orthogonale Matrix S gibt, so dass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist.*

Bemerkung 6.3.4 *Da $S^T = S^{-1}$ ist eine solche Matrix A auch diagonalisierbar, und die Einträge auf der Diagonalen von $S^T AS$ sind die Eigenwerte von A.*

6.4 Hermitesche Skalarprodukte

(Dieser Abschnitt kam in LA I nicht mehr dran; ich hänge ihn der Vollständigkeit halber trotzdem an.)

Alles, was in den Abschnitten 6.1 bis 6.3 gemacht wurde, geht so ähnlich auch für $\mathbb{C}$-Vektorräume, wenn man die Definition von Skalarprodukt leicht abwandelt.

Im Folgenden sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Definition 6.4.1 *Ein* ***Hermitesches Skalarprodukt*** *auf V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{C}, (u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für jedes $u \in V$ ist die Abbildung $v \mapsto \langle u, v\rangle$ linear.*

(b) *Für alle $u, v \in V$ gilt: $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, wobei $\bar{a}$ das komplex Konjugierte von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet; siehe Definition 2.3.3.*

(c) *Für alle $v \in V\setminus\{0\}$ ist $\langle v, v\rangle$ eine reelle Zahl größer als 0.*

Einen $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Hermiteschen Skalarprodukt nennt man ***unitären Vektorraum****.*

Die ***Norm*** *eines Vektors $v \in V$ ist $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.*

Beispiel 6.4.2 *Das* ***Hermitesche Standard-Skalarprodukt*** *auf $\mathbb{C}^n$ ist*

$$\langle u, v\rangle = \bar{u}^T v,$$

(wobei $\bar{u}$ der Vektor ist, den man aus u erhält, indem man alle Einträge komplex konjugiert).

- Satz 6.1.4 gilt unverändert für Hermitesche Skalarprodukte.
- Jedes Hermitesche Skalarprodukt lässt sich in der Form $\langle u, v\rangle = \bar{u}^T Av$ für geeignete Matrizen A schreiben. (Die Bedingung (a) aus Satz 6.1.5 muss leicht abgewandelt werden: A sollte eine **hermitesche Matrix** sein, d. h. $\bar{A}^T = A$.)
- Orthogonalität, Normiertheit und Orthonormalbasen definiert man wie in euklidischen Vektorräumen. Satz 6.1.4 (über die Existenz von Orthonormalbasen) gilt dann auch unverändert für Hermitesche Skalarprodukte.
- Im Folgenden verwenden wie das Standard-Hermitesche Skalarprodukt. Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, die $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$ erfüllen, nennt man **unitär**. Satz 6.3.2 gilt in leicht abgewandelter From: In (b) wird die Bedingung $\bar{A}^T = A^{-1}$. Satz 6.3.3 gilt auch in leicht abgewandelter Form: Statt „A symmetrisch“ muss es „A hermitesch“ heißen.

Index