Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

WS 2009/2010
13.10.09
Blatt 1

Übungen zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren I

1.a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion und ohne in ein Lehrbuch oder eine Vorlesungsmitschrift der Linearen Algebra zu schauen, dass jeder endlich-dimensionale euklidische Vektorraum eine Orthonormalbasis besitzt.

1.b) Seien V,W euklidische Vektorräume und seien $(v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_n)$ Orthonormalbasen von V bzw. W. Sei $\varphi : V \to W$ die lineare Abbildung mit $\varphi(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass φ ein isometrischer Isomorphismus ist, d.h. dass φ ein Vektorraum-Isomorphismus ist und $||\varphi(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$ erfüllt.

1.c) Seien V,W endlich-dimensionale euklidische Vektorräume und sei $\varphi : V \to W$ ein isometrischer Isomorphismus. Zeigen Sie: Durch

$$F \mapsto \varphi \circ F \circ \varphi^{-1}$$

erhält man einen Gruppenhomomorphismus

$$\Phi : O(V) \to O(W).$$

1.d) Sei V endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Erklären Sie, wie man $O(V)$ in vernünftiger Weise zu einem metrischen Raum machen kann und zeigen Sie, dass damit die Abbildung Φ aus 1.c) zu einem Homöomorphismus wird.

1.e) Definieren Sie für einen beliebigen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum die Gruppe $SO(V)$ und zeigen Sie, dass $SO(V)$ abgeschlossen in $O(V)$ ist und dass man mit der Bezeichnung aus 1.c) durch $F \mapsto \Phi(F)$ eine Abbildung von $SO(V)$ nach $SO(W)$ erhält, die gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus und ein Homöomorphismus ist.

Abgabe: Dienstag 20.10.09 in der Vorlesung
Besprechung: Dienstag 27.10.09 in Raum 25.22-U1.33 von 13-14 Uhr