Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2009/2010
15.12.09
Blatt 10

Übungen zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren I

18. Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra.

(a) Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$, so gibt es auf dem Quotientenvektorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ die Struktur einer Lie-Algebra, so dass die kanonischen Projektion $p : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ zu einem Lie-Algebren-Homomorphismus wird.

(b) Formulieren und beweisen Sie ein Analogon des Isomorphiesatzes der Gruppentheorie (Satz 2.3) für Lie-Algebren.

(c) Man definiert induktiv eine Folge von Unterräumen von $\mathfrak{g}$ durch

$$C^1\mathfrak{g} := \mathfrak{g},$$

$$C^{p+1}\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^p(\mathfrak{g})] \text{ für } p \geq 2.$$

Zeigen Sie, dass $(C^p\mathfrak{g})$ eine absteigende Folge von Idealen von $\mathfrak{g}$ ist.

(d) Man definiert induktiv eine Folge von Unterräumen von $\mathfrak{g}$ durch

$$C_0\mathfrak{g} := \{0\}\,,$$

$C_{p+1}\,\mathfrak{g}$ sei das Urbild von $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}/C_p\,\mathfrak{g})$ unter der kanonischen Projektion $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/C_p\,\mathfrak{g}$ für $p \geq 1$ (vgl. Aufg. 11).
Zeigen Sie, dass $(C_p\,\mathfrak{g})$ eine aufsteigende Folge von Idealen von $\mathfrak{g}$ ist mit $C_1\,\mathfrak{g} = \mathfrak{z}\,(\mathfrak{g})$.

(e) Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen für $\mathfrak{g}$ äquivalent sind:

(1) Es gibt ein p mit $C^p\mathfrak{g} = \{0\}$.
(2) Es gibt ein q mit $C_q\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Abgabe: Dienstag 22.12.09 in der Vorlesung